Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Demetrio Mangeron, L. E. Krivošein

Nuovi problemi concernenti sistemi funzionali con operatori iterati. - I. Problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali con operatori calorici ed argomenti ritardati

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.5, p. 614–620.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_5_614_0>

Analisi matematica. — *Nuovi problemi concernenti sistemi funzionali con operatori iterati. – I. Problemi al contorno per le equazioni integro–differenziali con operatori calorici ed argomenti ritardati.* Nota di DEMETRIO MANGERON e L. E. KRIVOŠEIN, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

A Mauro Picone nel Suo 80° compleanno.

1. Si deve a Mauro Picone la ripresa di vasta portata dei problemi concernenti i sistemi dinamici a memoria continua [1]–[3], caratterizzati dalle equazioni integro–differenziali di forma

$$\frac{d\mathrm{P}}{dt} = \mathrm{F}(\mathrm{P}, t) + \int \mathrm{H}_t(\mathrm{P}(t'))\, \mathrm{d}g_t(\mathrm{P}, t')$$

e considerati inizialmente da V. Volterra [4] nel caso in cui l'integrale ereditario si presenta sotto la forma

$$\int_{-\infty}^{t} \mathrm{P}(t')\, h(t-t')\, \mathrm{d}t',$$

ove il fattore di oblio h è monotonamente decrescente (1). Numerosi scienziati prendendo le mosse dai risultati conseguiti da M. Picone hanno studiato vari sistemi alle derivate parziali oppure integro–differenziali alle derivate parziali, lineari o no, con operatori iterati poliarmonici [5]–[7], polivibranti [8]–[9] e policalorici [10]–[12].

In una serie di lavori degli Autori iniziatisi con una Nota lincea dedicata a Mauro Picone nel Suo 75° Compleanno [13], rielaborati e raccolti poscia in due Memorie pubblicate nei « Rendiconti del Seminario Matematico dell'Università di Padova » [14]–[15] si è fatto un ampio studio dei problemi al contorno per le equazioni integro–differenziali a derivate parziali con derivata d'ordine superiore di Picone [15], inoltre nei lavori [16]–[17] sono stati studiati numerosi problemi al contorno concernenti equazioni integro–differenziali a derivate parziali con operatore esterno del tipo calorico (2). Vi si trovano esposti condizioni di esistenza, di unicità e di dipendenza delle soluzioni dei problemi

(*) Nella seduta del 10 aprile 1965.

(1) Gli integrali che vi entrano possono essere considerati integrali di Stieltjes e g una funzione, continua o no, a variazione limitata.

(2) Se

$$\mathrm{P}[u] \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right)^{(n)} = 0, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

allora – seguendo una vasta Memoria del M. NICOLESCU [18] – u si chiama funzione policalorica d'ordine n.

considerati dalle perturbazioni dei coefficienti noti. In alcuni casi sono stati indicati inoltre le valutazioni qualitative delle soluzioni e costruiti poscia soluzioni approssimate, mettendovisi in evidenza l'errore commesso.

In questo lavoro si stabiliscono alcuni teoremi concernenti condizioni di esistenza, di unicità e di stabilità (rispetto alle perturbazioni dei coefficienti noti) delle soluzioni di una classe di problemi al contorno spettanti alle equazioni integro-differenziali lineari con operatore calorico ed argomenti ritardati, ed inoltre uno studio spettante a certe equazioni analoghe non lineari come pure la determinazione delle valutazioni dei moduli delle soluzioni dei problemi considerati fa l'oggetto delle Note [19]-[20].

2. Consideriamo l'equazione integro-differenziale

$$\text{(1)} \qquad \mathrm{P}[u] = f(x,t) + a(x,t)\,u(x,t) + b(x,t)\,u(x-h_1(x),t) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{1} \int_0^{\mathrm{T}}\!\!\int_0^{a} \left[\mathcal{K}_i(x,t,y,\tau) \frac{\partial^i u(y,\tau)}{\partial \tau^i} + \mathfrak{D}_i(x,t,y,\tau) \frac{\partial^i u(y-h_2(y),\tau)}{\partial \tau^i} \right] dy\, d\tau\,,$$

ove $\mathrm{P}[u] \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, $a(x,t)$, $b(x,t)$, $\mathcal{K}_i(x,t,y,\tau)$, $\mathfrak{D}_i(x,t,y,\tau)$ $(i = 0, 1)$, $h_j \geq 0$, $h_j(x) \leq x \in [0, a]$ $(j = 1, 2)$, $f(x,t)$, sono funzioni note continue per tutti $(x,t), (y,\tau) \in \mathfrak{D} = [0 \leq x, y \leq a] \times [0 \leq t, \tau \leq \mathrm{T}]$ e $u(x,t)$ è la funzione incognita. Ci proponiamo di risolvere il problema al contorno (1) e

$$\text{(2)} \qquad u(x,0) = \varphi_1(x) \quad , \quad u(0,t) \equiv u(a,t) \equiv 0 \quad , \quad u(x,t) \equiv 0\,,$$
$$x \leq 0\,, \; 0 \leq t \leq \mathrm{T}\,,$$

ove $\varphi_1(x)$ è pure continua e $\varphi_1(0) = 0$.

Introduciamo una nuova funzione

$$\text{(3)} \qquad \varphi(x,t) \equiv a(x,t)\,u(x,t) + b(x,t)\,u(x-h_1(x),t) +$$
$$+ \sum_{i=0}^{1} \int_0^{\mathrm{T}}\!\!\int_0^{a} \left[\mathcal{K}_i(x,t,y,\tau) \frac{\partial^i u(y,\tau)}{\partial \tau^i} + \mathfrak{D}_i(x,t,y,\tau) \frac{\partial^i u(y-h_2(y),\tau)}{\partial \tau^i} \right] dy\, d\tau\,.$$

Utilizzando la funzione $\mathcal{G}(x,\xi,t-\alpha)$ ([17], p. 453) come pure il metodo del passaggio dall'equazione omogenea ad una non omogenea [20]-[21], dall'equazione (1) si ricava

$$\text{(4)} \qquad u(x,t) = m(x,t) + \int_0^{t}\!\!\int_0^{a} \mathcal{G}(x,\xi,t-\alpha)\,\varphi(\xi,\alpha)\, d\xi\, d\alpha\,,$$

ove si è posto

$$m(x,t) \equiv \int_0^{d} \left\{ \frac{2}{a} \sum_{i=0}^{\infty} \left[\exp - \left(\frac{\pi i}{a}\right)^2 t \right] \sin \frac{\pi i x}{a} \sin \frac{\pi i \xi}{a}\, \varphi_1(\xi) + \int_0^{t} \mathcal{G}(x,\xi,t-\alpha)\, f(\xi,\alpha)\, d\alpha \right\} d\xi\,,$$

$$\mathcal{G}(x,\xi,t-\alpha) \equiv \frac{2}{a} \sum_{i=1}^{\infty} \left[\exp - \left(\frac{\pi i}{a}\right)^2 (t-\alpha) \right] \sin \frac{\pi i x}{a} \sin \frac{\pi i \xi}{a}\,.$$

Sostituendo nella (3) la funzione u e le sue derivate [3] secondo la (4), si perviene alla seguente equazione integrale del tipo misto

$$\varphi(x, y) - \int_0^t \int_0^a M_1(x, t, y, \tau)\, \varphi(y, \tau)\, dy\, d\tau = \tag{5}$$

$$\psi(x, t) + \int_0^T \int_0^t M_2(x, t, y, \tau)\, \varphi(y, \tau)\, dy\, d\tau,$$

ove $\psi(\cdot), M_1(\cdot), M_2(\cdot)$ sono funzioni note continue per tutti $(x, t), (y, \tau) \in \mathfrak{D}$. Tenendo conto dei risultati esposti negli articoli anteriori degli Autori [22]–[23], si conclude che l'operatore

$$A[\varphi] \equiv \varphi(x, t) - \int_0^t \int_0^a M_1(x, t, y, \tau)\, \varphi(y, \tau)\, dy\, d\tau \tag{6}$$

ammette un operatore reciproco. Per conseguenza, dalla (5) si ottiene

$$\varphi(x, t) = A^{-1}\left[\psi(x, t) + \int_0^T \int_0^a M_2(x, t, y, \tau)\, \varphi(y, \tau)\, dy\, d\tau\right] \equiv \tag{7}$$

$$\Psi(x, t) + \int_0^T \int_0^a M_3(x, t, y, \tau)\, \varphi(y, \tau)\, dy\, d\tau.$$

Pertanto, se $\Phi(x, t)$ è la soluzione dell'equazione (7), ne risulta che la

$$u(x, t) \equiv m(x, t) + \int_0^t \int_0^a \mathcal{G}(x, \xi, t - \alpha)\, \Phi(\xi, \alpha)\, d\xi\, d\alpha \tag{8}$$

è la soluzione del problema (1), (2) inizialmente posto.

L'analisi dell'equazione (7) permette ad enunciare il seguente

TEOREMA 1. – Se 1 *non è un autovalore del nucleo* $M_3(x, t, y, \tau)$, *il problema* (1), (2) *possiede una soluzione unica nella classe delle funzioni* C_{21} [4] *oppure la soluzione ricercata non è inivocamente determinata.*

3. Diremo che una soluzione del problema (1), (2) è stabile rispetto alle piccole perturbazioni delle funzioni note che figurano nella (1) oppure nelle (2), se, per ogni numero positivo $\varepsilon > 0$, si può determinare un numero pur esso

(3) L'esistenza delle derivate rispetto a t della funzione $\mathcal{G}(\cdot)$ si verifica senz'altro.

(4) È cioè nella classe delle funzioni due volte continuamente derivabili per rapporto ad x ed una volta continuamente derivabili per rapporto a t per tutti $(x, t) \in \mathfrak{D}$. In ciò che segue si prenderanno in considerazione soltanto tali soluzioni. Nella [24] l'Illustre Accademico Linceo M. PICONE considera le soluzioni di certe equazioni integrali lineari appartenenti alla classe $\Gamma_{p_1 p_2 \cdots p_n}$ $(p_1 \geq 1, p_2 \geq 1, \cdots, p_n \geq 1)$ (soluzioni quasi continue).

positivo $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tale, che dalle ineguaglianze

$$
(9)\quad \begin{cases} |\varphi_1(x) - \varphi_{11}(x)| < \delta \quad , \quad |a(x,t) - a_1(x,t)| < \delta \quad , \quad |b(x,t) - b_1(x,t)| < \delta , \\ |\mathcal{K}_i(x,t,y,\tau) - \mathcal{K}_{i1}(x,t,y,\tau)| < \delta \quad , \quad |\mathcal{D}_i(x,t,y,\tau)| - \mathcal{D}_{i1}(x,t,y,\tau)| < \delta , \\ \qquad\qquad (i = 0, 1), \\ |h_i(x) - h_{ij}(x)| < \delta \qquad (i = 1, 2; j = 2, 1), 0 \leq x, y \leq a, 0 \leq t, \tau \leq T, \end{cases}
$$

se ne deduce l'ineguaglianza

$$
|u(x,t) - u_1(x,t)| < \varepsilon , \qquad (x,t) \in \mathcal{D} ,
$$

ove $u_1(x,t)$ è la soluzione del problema al contorno

$$
(10)\quad \mathrm{P}[u_1] = f_1(x,t) + a_1(x,t)\,u_1(x,t) + b_1(x,t)\,u_1(x - h_{12}(x), t)
$$

$$
+ \sum_{i=0}^{1} \int_0^T \int_0^a \left[\mathcal{K}_{i1}(x,t,y,\tau) \frac{\partial^i u_1(y,\tau)}{\partial \tau^i} + \mathcal{D}_{i1}(x,t,y,\tau) \frac{\partial^i u_1(y - h_{21}(y), \tau)}{\partial \tau^i} \right] dy\, d\tau ,
$$

$$
(11)\quad u_1(x,0) = \varphi_{11}(x) \quad , \quad u_1(0,t) \equiv u_1(a,t) \equiv 0 ;
$$

$$
u_1(x,t) \equiv 0 , x \leq 0 , 0 \leq t \leq T .
$$

In questo ordine di idee si può enunciare il seguente

TEOREMA 2. – *Se* 1 *non è un autovalore del nucleo* $\mathrm{M}_3(x,t,y,\tau)$, *la soluzione del problema* (1), (2) *è stabile rispetto alle piccole perturbazioni delle funzioni note.*

Osservazioni. – 1° Se le funzioni $\mathcal{K}_i(\cdot), \mathcal{D}_i(\cdot)$ $(i = 0, 1)$ soddisfano ad una delle condizioni [(5)]

$$
(12)\quad \begin{cases} \mathcal{K}_i(x,t,y,\tau) \equiv \begin{cases} \mathcal{K}_{i0}(x,t,y,\tau), & 0 \leq x, y \leq a, 0 \leq \tau \leq t \leq T, \\ 0, & 0 \leq x, y \leq a, 0 \leq t \leq \tau \leq T, \end{cases} \\ \mathcal{D}_i(x,t,y,\tau) \equiv \begin{cases} \mathcal{D}_{i0}(x,t,y,\tau), & 0 \leq x, y \leq a, 0 \leq \tau \leq t \leq T, \\ 0, & 0 \leq x, y \leq a, 0 \leq t \leq \tau \leq T, \end{cases} \end{cases}
$$

$$
(13)\quad l = 1 - \max_{\mathcal{D}} \iint_{\mathcal{D}} |\mathrm{M}_3(x,t,y,\tau)|\, dy\, d\tau > 0 ,
$$

il problema (1), (2) possiede sempre una soluzione stabile rispetto alle piccole perturbazioni delle funzioni note che figurano nelle (1) e (2). 2° L'equazione integrale di forma (7) può essere costruita introducendo la funzione

$$
(14)\quad \mathrm{M}_{10}(x,t,y,\tau) \equiv \begin{cases} \mathrm{M}_1(x,t,y,\tau), & 0 \leq x, y \leq a, 0 \leq \tau \leq y \leq T, \\ 0, & 0 \leq x, y \leq a, 0 \leq t \leq \tau \leq T. \end{cases}
$$

(5) Per maggiori precisioni, dettagli algoritmici ed altre condizioni di stabilità del problema studiato vedasi [16].

Abbiamo in questo caso

$$\varphi(x, t) - \int_0^T \int_0^a M_5(x, t, y, \tau) \varphi(y, \tau) \, dy \, d\tau = \psi(x, t), \tag{15}$$

ove si è posto

$$M_5(x, t, y, \tau) \equiv M_{10}(x, t, y, \tau) + M_2(x, t, y, \tau).$$

Epperciò, se 1 non è un autovalore del nucleo $M_5(x, t, y, \tau)$, oppure se, in particolare, è soddisfatta l'ineguaglianza

$$l_1 = 1 - \max_{\mathfrak{D}} \int_0^T \int_0^a |M_5(x, t, y, \tau)| \, dy \, d\tau > 0, \tag{16}$$

il problema (1), (2) possiede una soluzione unica, stabile rispetto alle piccole perturbazioni di cui sopra.

4. – In un lavoro di prossima pubblicazione nel « Bollettino dell'Istituto politecnico di Iasi » vi saranno esposti – nel quadro delle estensioni dei risultati testè conseguiti – alcuni problemi concernenti equazioni integro–differenziali con operatori policalorici, seguiti poi da alcune applicazioni dei metodi escogitati relativi allo studio delle equazioni integro–differenziali con operatori esterni poliarmonici, polivibranti e policalorici [25], ove si incorniciano in numero vieppiù grande le schematizzazioni matematiche di svariatissimi fenomeni della fisica e della tecnica, incominciando dai sistemi dinamici frangenti [26] e dai sistemi reologici ereditari [27].

In un altro lavoro, seguendo l'ordine delle idee della programmazione dinamica [28], già utilizzata dal primo degli Autori per lo studio dei problemi al contorno per i sistemi a derivate parziali non ellittici, come pure quello concernente l'applicazione dei criteri sufficienti di M. Picone per il minimo assoluto di un integrale pluridimensionale dipendente da un vettore a più componenti e dalle derivate parziali di questo, d'ordine qualsivoglia [29]–[30], si studiano alcuni problemi degli spettri spettanti ai sistemi integro–differenziali considerati, mentre nelle note [31]–[32], prendendo le mosse da una Memoria oramai classica di M. Picone e Gaetano Fichera che espone le nuove basi funzionali analitici dei metodi della risoluzione e dei problemi di esistenza relativi ai sistemi lineari a derivate parziali [33], si espongono certi aspetti computazionali di quest'altro nuovo metodo di vasta portata di Picone.

BIBLIOGRAFIA.

[1] M. PICONE, *Nuove determinazioni concernenti l'equazione integrale di Volterra*, « Ann. mat. pura ed appl. », *50*, 97–113 (1960).

[2] M. PICONE, *Sull'equazione integrale non lineare di seconda specie di Fredholm*, « Math. Z. », *74* (2), 119–128 (1960).

[3] M. PICONE, *Ancora sullo spettro in un parametro da cui dipendono certe equazioni integrali lineari*, « Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. fis., mat e nat. », ser. 8ª, *28* (6), 743–745 (1960).

[4] V. VOLTERRA, *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni*. Nel volume « Opere Matematiche ». *Memorie e Note*. Pubblicate a cura dell'Accademia Nazionale dei Lincei col concorso del Consiglio Nazionale delle Ricerche. Roma, Accademia Nazionale dei Lincei. 1954, pp. 294–314.

[5] M. PICONE, *Sulle funzioni metaarmoniche*, « Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. fis., mat. e nat. », ser. 6ª, *6* (1927).

[6] M. NICOLESCU, *Les fonctions polyharmoniques*. Hermann, Paris 1936.

[7] J. MUSIALEK, *O oscylacyjności rozwiazań pewnej klasy równań poliharmonicznych* (*Sull'oscillazione delle soluzioni di una classe di equazioni poliarmoniche*), « Roczn. Polsk. towarz. mat. », ser. 1ª, *8*, (1), 15–19 (1963).

[8] D. MANGERON, *Sur une classe de problèmes à la frontière non elliptiques d'ordre supérieur*, « C. r. Acad. Sci., Paris », *255*, 2894–2896 (1962).

[9] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Contributi allo studio delle equazioni polivibranti*. – I. *Calcolo numerico delle soluzioni di una classe di problemi al contorno non lineari*. – II. *Comportamento qualitativo delle soluzioni di una nuova classe di problemi al contorno integro-differenziali non lineari*, « Studii şi cercetări matematice », Acad. R. P. R., *15*, 811–823; 967–985 (1964).

[10] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Problèmes aux limites de type mixte concernant une classe d'équations intégro-differentielles paraboliques*, Acad. Roy. de Belgique. « Bull. Cl. Sci. », 5–e série, L(4), 424–433 (1964).

[11] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Problèmes mixtes pour une classe d'équations integro-différentielles de type parabolique*, « Bul. Inst. politehn. Bucureşti », XXVI (1), 17–31 (1964).

[12] M. NICOLESCU, *Sur un théorème de moyenne de M. Mauro Picone*, « Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e nat. », ser. VIII, *34* (1), 40–44 (1963).

[13] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sopra una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate totali nel senso di Picone* (A Mauro Picone nel Suo 75° compleanno), « Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e nat. », ser. VIII, *31* (1–2), 27–32 (1961).

[14] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sopra i problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali lineari a derivate parziali con derivata d'ordine superiore di Picone*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », XXXIII, 226–266 (1963).

[15] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Sulla risoluzione di una classe di problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali a derivate parziali*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », XXXIV, 344–368 (1964).

[16] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Nuovi problemi concernenti sistemi funzionali con operatori iterati*. – I. *Problemi al contorno per le equazioni integro-differenziali con operatori calorici ed argomenti ritardati*. (A Mauro Picone nel Suo 80° compleanno), « Rend. Sem. Mat. Univ. Padova », (in stampa).

[17] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Teoremi di esistenza, di unicità e di valutazione delle soluzioni di alcuni problemi al contorno concernenti equazioni integro-differenziali con operatori esterni di tipo parabolico*, « Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e nat. », ser. 8ª, *36* (4), 451–456 (1964).

[18] M. NICOLESCU, *Ecuatia iterată a căldurii* (*Equazione iterata della propagazione del calore*), « Studii şi cercetări matematice », Acad. R. P. R., V (3–4), 243–332 (1954).

[19] D. MANGERON, E. E. STIHI, *Quelques théorèmes concernant les problèmes à la frontière pour les équations intégro-différentielles à opérateurs caloriques et arguments retardés*, Acad. Roy. Belgique, « Bull. Cl. Sci. », 5–e série, LI (in stampa).

[20] F. ROSSI, *Sur la stabilité des solutions de certains systèmes fonctionnels à opérateurs itérés*, Acad. Roy. Belgique. « Bull. Cl. Sci. », 5–e série, LI (in stampa).

[21] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Rešenie zadaci Goursat dlia odnogo klassa integro–diffrentzial'nyh uravnenii* (*Risoluzione del problema di Goursat per una classe di equazioni integro–differenziali*), « Doklady tretiei Sibirskoi Konferentzii po matematike i mehanike », Izd. Tomskogo Univ., 133–135 (1964).

[22] L. E. KRIVOŠEIN, D. MANGERON, *K rešeniu nacial'noi zadaci dlia integro–differentzial'nyh uravnenii v častnyh proizvodnyh* (*Sulla risoluzione del problema dei valori iniziali per le equazioni integro–differenziali a derivate parziali*, « Materialy 12–oi naucinoi Konferentzii prof.–prepod. sostava fiz.–mat. fak. », Kirg. Gos. Univ., Frunze, 1964, 17–20.

[23] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *New methods of numerical calculation for the solutions of various integro–differential systems*. – I. « Revue Roumaine Sci. techn. Mécanique appl. », *9* (6), 1195–1222 (1964).

[24] M. PICONE, *Sullo spettro di un parametro da cui dipendono certe equazioni integrali lineari*, « Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e nat. », ser. 8ª, *23* (6), 347–354 (1957) (1958).

[25] A. OPREA, ST. RUSCIOR, *Su una classe di problemi al contorno concernenti i sistemi funzionali con operatori iterati di Mangeron–Krivošein*, « Bull. Inst. politehn. Iasi », s. n., XI (XV) (in stampa).

[26] TH. VOGEL, *Sur différentes classes de systèmes évolutifs*, « Bul. Inst. politehn. Iaşi », s. n., X (XIV), (3–4) 27–36 (1964).

[27] M. I. ROZOVSKI, *Integral operator methods in the hereditary theory of creep*, « 2nd All–Union Congress on theor. appl. Mech. », Moscow, Jan. 29–Febr. 5, 1964, Abstracts of papers, p. 184.

[28] D. MANGERON, *The Bellman Equations of Dynamic Programming concerning a new Class of Boundary Value Problems with « Total Derivatives »*, « J. Math. Anal. Appl. », *9* (1), 141–146 (1964).

[29] M. PICONE, *Nuovi metodi variazionali generali concernenti integrali pluridimensionali nel vettore minimante*, « Bul. Inst. politehn. Iasi », s. n., X (XIV), (3–4), (1964).

[30] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *Alcuni problemi concernenti equazioni funzionali ad operatori calorici*. (A Mauro Picone nel Suo 80° compleanno), « Rend. Accad. Sci. fis., mat. Napoli », (in stampa).

[31] D. MANGERON, L. E. KRIVOŠEIN, *L'applicazione di un nuovo metodo di Picone allo studio dei problemi al contorno a derivate parziali*, « Boll. Un. Mat. Ital. » (in stampa).

[32] A. LOWAN, *On the Picone treatment of boundary –value problems for partial differential equations*, University of California, Radiation Laboratory. Livermore Site. UCRL–5310, 38 pp. (1958).

[33] M. PICONE, G. FICHERA, *Neue Funktionalanalytische Grundlagen für die Existenzprobleme und Lösungsmethoden von Systemen linearer partieller Differentialgleichungen*, « Monatsh. Math. », *54*, 188 (1950).