Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Carlo Trombetti

Sull'integrazione delle equazioni differenziali delle linee nord ed est per l'ellissoide a tre assi

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.5, p. 670–673.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_5_670_0>

Geodesia. — *Sull'integrazione delle equazioni differenziali delle linee nord ed est per l'ellissoide a tre assi.* Nota di CARLO TROMBETTI, presentata [(*)] dal Socio L. SOLAINI.

È noto [1] che sull'ellissoide a tre assi S_t il doppio sistema di linee coordinate φ e λ, (le prime luogo dei punti di uguale latitudine e le seconde luogo dei punti di uguale longitudine) costituente il *sistema geografico* di coordinate curvilinee (φ, λ), non è ortogonale. Su una tale superficie può essere utile disporre di un doppio sistema di coordinate curvilinee ortogonali, oltre a quello delle linee di curvatura [2]: a queste condizioni soddisfa il sistema delle linee nord e est. Si sono pertanto ricercate le equazioni in termini finiti cui devono soddisfare tutti i punti di tali linee.

Come già in precedenza effettuato [1] si riferisca l'ellissoide S_t di semiassi a, b, c, o con $a > b > c$, ad una terna trirettangolare di assi x, y, z avente l'origine al centro di S_t, disposti in modo che le direzioni positive degli assi delle x, y, z, coincidano con i semiassi a, b, c. La sua equazione è

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0. \tag{1}$$

Il piano equatoriale (piano xy), il primo piano meridiano (piano xz), ed il secondo piano meridiano (piano yz) intersecano l'ellissoide secondo le tre ellissi

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{2}$$

le cui eccentricità sono rispettivamente

$$e_1^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} \quad ; \quad e_2^2 = \frac{a^2 - c^2}{a^2} \quad ; \quad e_3^2 = \frac{b^2 - c^2}{b^2}; \tag{3}$$

Questo ellissoide si supponga collegato all'ellissoide di rotazione terrestre in modo che:

1° il centro del primo ellissoide coincida col centro del secondo;

2° la terna di assi $Oxyz$ del primo coincida con quella del secondo;

3° semiasse c di S_t sia uguale a quello polare dell'ellissoide di rotazione (quindi vengono a coincidere i poli dei due ellissoidi ed i piani equatoriali);

4° il primo piano meridiano di S_t (cui corrisponde la sezione meridiana maggiore) coincida col meridiano fondamentale dell'ellissoide di rotazione. Di conseguenza il secondo piano meridiano di S_t viene a coincidere col meridiano normale a quello fondamentale del secondo ellissoide.

Sull'ellissoide S_t si chiama *direzione cardinale nord* in un punto generico P la retta intersezione del piano tangente in P alla S_t, col piano individuato

(*) Nella seduta dell'8 maggio 1965.

dalla normale in P ad S_t e dalla parallela in P all'asse delle z. Conseguentemente si chiama *direzione cardinale est* in P la retta perpendicolare alla retta cardinale nord sita nel piano tangente in P ad S_t.

Si consideri per P la terna trirettangolare formata dalla normale in P ad S_t e dalle direzioni cardinali nord ed est, si assuma come senso positivo della normale quello rivolto verso l'esterno, come senso positivo della retta nord quello rivolto verso il senso positivo dell'asse z; il senso positivo della terza retta (direzione cardinale est) deve essere tale che la terna trirettangolare assunta in P abbia lo stesso orientamento della terna $Oxyz$.

Si chiamino *linee nord* della S_t le linee in ciascun punto delle quali la tangente coincide con la direzione cardinale nord e *linee est* le linee ortogonali alle linee nord.

Le equazioni differenziali di tali linee su di una superficie qualunque riferita al sistema di coordinate curvilinee (φ, λ) sono le seguenti [3]:

per le linee nord

$$D' d\varphi + D'' d\lambda = 0 ; \tag{4}$$

per le linee est

$$D\, d\varphi + D' d\lambda = 0 \tag{5}$$

ove con D , D', D'' si sono indicati al solito i coefficienti della seconda forma fondamentale differenziale

$$\Phi = D\, d\varphi^2 + 2\, D' d\varphi\, d\lambda + D'' d\lambda^2 .$$

Le espressioni di D , D', D'' per l'ellissoide a tre assi sono le seguenti [4]:

$$\left\{ \begin{aligned} D &= a\, K^3 (1 - e_2^2)\ (1 - e_1^2 \operatorname{sen}^2 \lambda) \\ D' &= a\, K^3\, e_1^2 (1 - e_2^2) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda \\ D'' &= a K^3 [(1 - e_1^2)\, (1 - e_2^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) + (1 - e_2^2)\, e_1^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \lambda] \cos^2 \varphi \end{aligned} \right. \tag{6}$$

nelle quali

$$K = (1 - e_1^2 \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \lambda - e_2^2 \operatorname{sen}^2 \varphi)^{-1/2} \tag{7}$$

che è sempre $\neq 0$; da essa

$$- \frac{dK}{K} = K^2\, (e_1^2 \operatorname{sen}^2 \lambda - e_2^2) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi\, d\varphi - e_1^2 \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda\, d\lambda . \tag{8}$$

L'equazione differenziale (5) delle linee est per le (6) assume la veste

$$(1 - e_1^2 \operatorname{sen}^2 \lambda)\, d\varphi + e_1^2 \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda\, d\lambda = 0 \tag{9}$$

nella quale, dividendo per $\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi\, (1 - e_1^2 \operatorname{sen}^2 \lambda)$ che è sempre diversa da zero per $0 < \varphi < 90^\circ$, $-90 < \varphi < 0$, qualunque sia il valore di λ, le variabili sono subito separate

$$\frac{d\varphi}{\operatorname{sen} \varphi \cos \varphi} + \frac{e_1^2 \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda}{(1 - e_1^2 \operatorname{sen}^2 \lambda)}\, d\lambda = 0$$

da cui integrando

$$\log \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \log (1 - e_1^2 \operatorname{sen}^2 \lambda) + \log c_1$$

ove c_1 è una costante, per cui:

$$\operatorname{tg} \varphi = c_1 (1 - e_1^2 \operatorname{sen}^2 \lambda)^{1/2} \tag{10}$$

Per $\varphi = 0$ la linea est coincide con l'equatore; per $\varphi = 90^0$ si riduce ad un punto.

L'equazione differenziale (4) delle linee nord per le (6) si può scrivere

$$e_1^2 (1 - e_2^2) \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda \, d\varphi +$$

$$+ [(1 - e_1^2)(1 - e_2^2 \operatorname{sen}^2 \varphi) + (1 - e_2^2) e_1^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \lambda] \cos \varphi \, d\lambda = 0 .$$

Per separare le veriabili si divida per $\cos \varphi \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda$, che è sempre diversa da zero per $|\varphi| \neq 90^0$ e per $\lambda \neq 0^0, 90^0, 180^0, 270^0$: si ottiene

$$e_1^2 (1 - e_2^2) \operatorname{tg} \varphi \, d\varphi +$$

$$+ (1 - e_2^2 \operatorname{sen}^2 \varphi - e_1^2 + e_1^2 e_2^2 \operatorname{sen}^2 \varphi + e_1^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \lambda - e_1^2 e_2^2 \operatorname{sen}^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \lambda) \cdot$$

$$\cdot \frac{d\lambda}{\operatorname{sen} \lambda \cos \lambda} = 0$$

poi si sommi e si sottragga entro la prima parentesi $e_1^2 \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \lambda$ ed entro la seconda $e_1^4 \cos^2 \varphi \operatorname{sen}^2 \lambda \cos^2 \lambda$; tenendo presente la (7) si perviene alla

$$e_1^2 \frac{1}{K^2} \operatorname{tg} \varphi \, d\varphi + e_1^2 (e_1^2 \operatorname{sen}^2 \lambda - e_2^2) \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi \, d\varphi -$$

$$- e_1^4 \cos^2 \varphi \operatorname{sen} \lambda \cos \lambda \, d\lambda + \frac{1}{K^2} \frac{1}{\operatorname{sen} \lambda \cos \lambda} d\lambda - e_1^2 \frac{1}{K^2} \operatorname{ctg} \lambda \, d\lambda = 0$$

da cui moltiplicando per K^2 e tenendo presente la (8) si giunge alla

$$e_1^2 \operatorname{tg} \varphi \, d\varphi - e_1^2 \frac{dK}{K} + \frac{1}{\operatorname{sen} \lambda \cos \lambda} d\lambda - e_1^2 \operatorname{ctg} \lambda \, d\lambda = 0. \tag{11}$$

Si verifica facilmente che la espressione contenuta nel primo membro della (11) è un differenziale esatto. Pertanto l'integrale generale della equazione differenziale delle linee nord si può scrivere

$$f(\varphi, k, \lambda) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} X(\varphi) \, d\varphi + \int_{K_0}^{K} Y(K) \, dK + \int_{\lambda_0}^{\lambda} Z(\lambda) \, d\lambda + C .$$

Integrando la (11) per $|\varphi| \neq 90^0$ e per $0^0 < \lambda < 90^0$, $270^0 < \lambda < 360^0$ si ottiene

$$- e_1^2 \log \cos \varphi - e_1^2 \log K + \log \operatorname{tg} \lambda - e_1^2 \log \operatorname{sen} \lambda = \log c_2$$

ove c_2 è una costante, da cui

$$\operatorname{tg} \lambda = c_2 (K \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda)^{e_1^2} .$$

Se invece $90^0 < \lambda < 180^0$, $180^0 < \lambda < 270^0$ segue

$$- \operatorname{tg} \lambda = c_2 (K \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda)^{e_1^2}$$

In definitiva

$$|\operatorname{tg} \lambda| = c_2 (K \cos \varphi \operatorname{sen} \lambda)^{e_1^2} . \tag{12}$$

Per i valori di λ che sono stati esclusi, le linee nord coincidono con le due ellissi meridiane principali.

BIBLIOGRAFIA.

[1] C. TROMBETTI, *Il trasporto delle coordinate geografiche e dell'azimut lungo geodetiche dell'ellissoide a tre assi nel campo geodetico*, « L'Universo », n° 2 (1943).

[2] C. TROMBETTI, *Su talune ricerche geometriche sull'ellissoide a tre assi*, « L'Universo », n° 3 (1943).

[3] C. MINEO, *Sulle superfici riferite a un sistema geografico e sulla determinazione intrinseca del geoide*, « Giornale di matematiche, » terza serie, vol. XLVIII, Napoli (1910).

[4] G. BOAGA, *Su alcune forme fondamentali di geodesia ellissoidica*, Padova – Tipografia del Seminario (1936).

RIASSUNTO. — Rilevato che il doppio sistema geografico non risulta ortogonale, sull'ellissoide a tre assi, l'autore ricava le equazioni differenziali delle linee cardinali nord ed est le quali formano un doppio sistema di coordinate curvilinee ortogonali.

L'integrazione dell'equazione differenziale delle linee est è immediata, quella relativa alle linee nord viene condotta a termine con opportuni algoritmi e sostituzioni di variabili.