Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Leonard Roth

Sulla classificazione delle varietà abeliane

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **38** (1965), n.6, p. 844–850.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_38_6_844_0>

Geometria. — *Sulla classificazione delle varietà abeliane.* Nota di LEONARD ROTH, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

Nella presente Nota diamo uno sguardo rapido al metodo di classificare le varietà abeliane; come vedremo (n. 4), tali varietà hanno sempre il genere geometrico e i plurigeneri ≤ 1, e il metodo attuale dà dei risultati completi solamente per quei tipi che abbiano qualche plurigenere positivo. Esattamente 55 anni dopo le celebri Memorie [1,3] rispettivamente di Bagnera – De Franchis e di Enriques – Severi, sulle superficie abeliane, siamo venuti in possesso di tutti gli strumenti necessari all'uopo; alcuni di questi vengono qui descritti per la prima volta.

Per le dimostrazioni dei vari risultati che ci occorrono, nonché per le relative notizie storiche, rimandiamo alla Monografia [5].

1. In tutto il seguito è fondamentale il concetto di *funzione abeliana di genere* p [2], associata ad una data matrice ω di Riemann; tale funzione $f(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ dipende effettivamente dalle p variabili complesse u_i, è meromorfa ovunque al finito, e possiede $2p$ periodi simultanei definiti da ω. Denotiamo con U_{2p} una regione fondamentale (a $2p$ dimensioni reali) di quei periodi.

Chiameremo *varietà abeliana* ogni varietà W_p irriducibile e p–dimensionale che ammetta una rappresentazione parametrica mediante funzioni abeliane appartenenti a ω; allora il *rango* r di W_p è il numero dei punti di U_{2p} corrispondenti al punto generico di W_p. In particolare, W_p chiamasi *varietà* di *Picard* se, e soltanto se, $r = 1$. Possiamo dimostrare che *ogni* W_p *è algebrica*.

È di grande importanza il *teorema*: *è sempre possibile costruire un modello proiettivo non singolare di una data varietà di Picard tale che i suoi punti siano in corrispondenza biunivoca, senza eccezioni, coi punti di* U_{2p}. La prima dimostrazione rigorosa di questo risultato è dovuta a Siegel.

2. VARIETÀ DI PICARD. – Denotando con V_p il modello suddetto, osserviamo che le relative variabili u_i costituiscono delle coordinate universali sulla varietà. Ne consegue subito che V_p ammette sempre due tipi diversi di automorfismi, rappresentati rispettivamente dalle equazioni (mod. ω)

$$u'_i = u_i + c_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, p) \tag{1}$$

$$u'_i = -u_i + c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p), \text{ con } c_i \text{ costanti.} \tag{2}$$

Evidentemente l'insieme delle trasformazioni (1), dette di *prima specie*, forma un gruppo abeliano continuo G_p che risulta completamente e semplicemente

(*) Nella seduta del 17 giugno 1965.

transitivo su V_p. Invece ogni trasformazione (2), detta di *seconda specie*, è involutoria. E la V_p a moduli generali non ammette altri automorfismi che questi.

Possiamo dimostrare che *il fatto di possedere il gruppo* G_p *caratterizza* V_p.

3. Passando agli invarianti di V_p, vi è luogo a considerare le forme differenziali di prima specie, ovunque finite su V_p. Anzitutto si vede subito che tutte quelle forme di primo grado sono funzioni lineari, a coefficienti costanti, delle differenziali du_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$. Più generalmente si può dimostrare che tutte le forme differenziali di prima specie e di grado k $(2 \leq k \leq p)$ sono funzioni analoghe dei prodotti quali $du_1 du_2 \cdots du_k$. Eppertanto i rispettivi numeri di forme differenziali di prima specie e di grado k, linearmente indipendenti tra loro, sono forniti dalle formule

$$g_k(V_p) = \binom{p}{k} \quad (1 \leq k \leq p). \tag{3}$$

In particolare, il genere geometrico $P_g(V_p)$, che non è altro che $g_p(V_p)$, risulta uguale ad uno. Ed in virtù dell'esistenza del gruppo G_p inerente a V_p (n. 2), segue che *l'ipersuperficie canonica e tutte le ipersuperficie pluricanoniche di* V_p *sono nulle* (cioè effettive e di ordine zero).

Perveniamo alle stesse conclusioni adoperando il concetto di forma tensoriale, dovuto a Kähler. Supponendo per il momento che V_p sia una forma qualsiasi, dotato di singolarità ordinarie, e situata in uno spazio $S_{p+1}(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1})$, si può stabilire agevolmente che il plurigenere $P_i(V_p)$ $(i = 2, 3, \ldots)$ è il numero delle forme di prima specie, indipendenti tra loro, del tipo (1)

$$A(x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}) \left\{ \frac{\partial(x_1, x_2, \ldots, x_p)}{\partial(u_1, u_2, \ldots, u_p)} \right\}^i, \tag{4}$$

ove A denota una funzione razionale, e le u_i sono coordinate locali sulla varietà.

Il genere aritmetico $P_a(V_p)$ viene dato dalla relazione di Severi – Kodaira,

$$P_a(V_p) = g_p - g_{p-1} + \ldots + (-1)^{p-1} g_1. \tag{5}$$

Ne discende in particolare che *il genere aritmetico della varietà di Picard è uguale a* $(-1)^{p-1}$.

4. VARIETÀ ABELIANE. – Dopo questi preliminari passiamo a considerare le varietà abeliane di rango $r > 1$. Evidentemente ogni tale varietà W_p è trasformata razionale di qualche V_p di Picard: oppure – che è lo stesso – *immagine d'una involuzione* I_n (*di punti*) *sopra* V_p.

Orbene, per poter applicare le considerazioni del n. 3 ad una varietà così definita, occorre sapere che esiste una trasformata birazionale di W_p che sia priva di punti singolari; e sta di fatto che i modelli di I_n che naturalmente

(1) Siccome una funzione abeliana ovunque olomorfa dev'essere costante, nel caso delle varietà di Picard, la funzione A è costante (non nulla).

si presentano sono quasi sempre dotati di singolarità complicate. L'esistenza del modello richiesto, nel caso $p > 3$, è ormai garantita da certi risultati di Hironaka che sono in corso di pubblicazione.

Consideriamo ora la corrispondenza tra V_p e questo modello non singolare, che continueremo a denotare con W_p. Anzitutto si vede che *tutte le ipersuperficie canoniche e pluricanoniche di* W_p *sono o virtuali o nulle*. E quindi risulta che $P_g(W_p) \leq 1$, $P_i(W_p) \leq 1$. Similmente, abbiamo che $g_k(W_p) \leq g_k(V_p) \leq \binom{p}{k}$.

I valori esatti degli invarianti di W_p possono venir calcolati come segue. Sia $P(u_i)$ un punto generico di I_n: allora la forma differenziale $du_1 du_2 \ldots du_k$ attaccata a V_p è pure una forma differenziale di prima specie attaccata a W_p se, e soltanto se, essa mantiene lo stesso valore a tutti i punti coniugati a P in I_n; e tutte le forme differenziali di prima specie su W_p – se ve ne sono – provengono nella stessa maniera.

Il genere aritmetico $P_a(W_p)$ è poi dato dalla (4). I vari plurigeneri di W_p vengono determinati analogamente, poggiando sulla nozione di forma tensoriale. Così il plurigenere $P_i(W_p)$ risulta uguale ad uno se, e soltanto se, il determinante jacobiano

$$J \equiv \partial(u_1, u_2, \ldots, u_p)/\partial(u'_1, u'_2, \ldots, u'_p),$$

calcolato rispetto ad una qualunque coppia (u_i) e (u'_i) di punti coniugati di I_n, mantiene lo stesso valore – e precisamente una radice i – esima dell'unità – quando (u_i) rimane fisso e (u'_i) varia entro il gruppo dei $n - 1$ coniugati in I_n.

5. Il Teorema principale. – Il seguente risultato sta alla base della classificazione delle varietà abeliane: *ogni involuzione* I_n *su* V_p *che abbia qualche plurigenere uguale ad uno e che non sia composta con una involuzione picardiana (cioè immagine di qualche altra* V_p*) è generabile con un gruppo* G_n *di ordine n di automorfismi di* V_y.

La dimostrazione del teorema, che è di carattere trascendente–topologico, poggia sul fatto che, per l'ipotesi fatta, il determinante J del n. 4 non può mai annullarsi, e che di conseguenza non esistono punti fondamentali in I_n. Per l'interessante storia di questa proposizione si può consultare [5]. In linguaggio geometrico essa ci dice che *data una qualsiasi sottovarietà* W_h *irriducibile di* V_p, *non appartenente a* I_n, *il luogo dei coniugati dei suoi punti si scinde in* $n - 1$ *varietà birazionalmente equivalenti a* W_h.

Va notato che non è sempre valido il teorema inverso: ad esempio, dalla corrispondenza tra V_p e W_p si deduce facilmente che *se* I_n *possiede* ∞^{p-1} *coincidenze, allora* $P_g(W_p) = P_i(W_p) = 0$. Ma ciò nonostante, possiamo costruire esempi di tali involuzioni generabili con gruppi G_n.

6. D'ora innanzi denoteremo con W_p una varietà abeliana (e non picardiana) non singolare, la quale sia immagine d'una involuzione I_n su V_p. E supporremo che W_p abbia qualche plurigenere uguale ad uno; sicché I_n sarà

dotata di al più ∞^{p-2} coincidenze. Per tale famiglia di W_p il problema di classificazione viene posto come segue.

(i) evidentemente il relativo gruppo G_n è generabile con un numero finito di sostituzioni della forma

$$u'_i = \sum_{j=i}^{p} a_{ij} u_i + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p), \tag{6}$$

ove le a_{ij}, b_i sono costanti. Il primo compito è quindi quello di determinare tutti i gruppi G_n di collineazioni in p variabili indipendenti;

(ii) siccome, per ipotesi, W_p non è picardiana, non tutte le trasformazioni del relativo gruppo G_n possono essere di prima specie; e salvo in un caso particolare – di cui tra breve – non sono tutte di seconda specie. In generale dunque si presenta il fenomeno della *moltiplicazione complessa*, che può verificarsi soltanto sulle V_p a moduli particolari. Il secondo compito allora è di ottenere tutti i tipi *a priori* possibili di tale moltiplicazione (cfr. [5]);

(iii) in fine si passa alla costruzione effettiva delle corrispondenti matrici di Riemann. Incidentalmente, cosí si ottengono tutti i valori possibili del rango r di W_p.

Nel corso dell'indagine troveremo anche quelle varietà abeliane a plurigeneri tutti nulli che rispecchiano involuzioni I_n generabili mediante gruppi G_n.

Per tutte le varietà W_p cosí determinate, possiamo calcolare gli invarianti g_k, P_i, P_a coi metodi del n. 4, poggiando sulle (6).

7. LA VARIETÀ DI WIRTINGER. – Illustriamo i concetti precedenti sopra un caso interessante, quello della varietà di Wirtinger, che generalizza in modo ovvio la superficie di Kummer. Il relativo gruppo G_n è generato dalla sola sostituzione.

$$u'_i = -u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, p). \tag{7}$$

Si tratta quindi d'una involuzione I_2 con numero finito (e precisamente 2^{2p}) di coincidenze.

È chiaro che ogni prodotto quale $du_1 du_2 \ldots du_k$ rimane invariante sotto le (7) se, e soltanto se, k è pari, e quindi abbiamo che

$$g_k = \binom{p}{k} \quad (k \text{ pari}) \quad ; \quad g_k = 0 \quad (k \text{ dispari}).$$

Dalla (5) si trae che

$$P_a = (-1)^p (2^{p-1} - 1).$$

Quest'ultimo risultato è stato ottenuto da Gröbner [2], poggiando sulla teoria delle funzioni theta e la formula di postulazione di Hilbert.

Considerando poi le forme tensoriali (4), abbiamo che

$$P_{ip} = 1 \quad (ip \text{ pari}) \quad ; \quad P_{ip} = 0 \quad (ip \text{ dispari}).$$

8. Il Caso $V_p = J_p$. – Accenniamo ad un altro caso particolare, di notevole interesse, e cioè quello in cui V_p venga identificata con la varietà J_p di Jacobi, che rappresenta i gruppi di p punti d'una curva C di genere p (≥ 2). Com'è ben noto, se C è a moduli generali, essa non possiede automorfismi; ma in altri casi C può ammettere dei gruppi G_n finiti di trasformazioni birazionali in sè. Denotando con (u_i) l'insieme degli integrali di prima specie attaccati a C, osserviamo che a ciascuno di tali gruppi corrisponde un certo numero di sostituzioni quali le (6), che esprimono i legami tra gli integrali u_i a punti omologhi di C. Il passaggio ai risultati analoghi per J_p è immediato: difatti ogni integrale v_i di prima specie attaccato a J_p è della forma

$$v_i = u_i(x_1) + u_i(x_2) + \cdots + u_i(x_p),$$

ove $x_1, x_2, \cdots, x_p$ sono punti di C omologhi a un punto di J_p.

Con la risoluzione del problema di determinare tutti i possibili gruppi G_n di automorfismi di C, è risolto pure quello di costruire le relative matrici di Riemann.

Fin qui abbiamo supposto che C sia irriducibile; ma sono interessanti anche quei casi in cui C venga spezzata in due o più componenti; allora possono sorgere, in più delle funzioni abeliane propriamente dette, quei tipi degeneri che si chiamano funzioni quasi abeliane (n. 10).

9. Varietà pseudo-abeliane. – Consideriamo ora il caso in cui W_p abbia irregolarità superficiale $q > 0$; e possiamo supporre che sia $q < p$, in base ad un teorema di Severi, secondo cui se $q = p$, W_p è picardiana. Per ipotesi, precisamente q ($= g_1$) delle differenziali du_i debbono rimanere immutate per le sostituzioni del relativo gruppo G_n, il che implica che, nelle (6), precisamente q delle costanti a_{ij} siano uguali ad uno. In quel caso possiamo modificare la matrice ω dei periodi in modo tale da ridurre le (6) alla forma canonica [2]

$$u'_i = u_i + b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, q), \tag{8'}$$

$$u'_j = \lambda_j u_j + b_j \qquad (j = q+1, q+2, \ldots, p). \tag{8''}$$

E siccome il gruppo generato delle (8'), (8'') è finito, le costanti λ_j debbono essere radici dell'unità, diverse dall'unità stessa.

Ora l'esistenza della relativa involuzione I_n porta ad una notevole specializzazione della V_p; nel caso attuale essa ammette un sottogruppo invariante G_q, le cui traiettorie costituiscono una *congruenza* (sistema d'indice uno) picardiana di varietà V_q di Picard, e conseguentemente – come del resto è ben noto – un secondo sottogruppo invariante G_{p-q} con relativa congruenza di traiettorie del tutto analoga alla prima.

Segue dalle (8') che W_p ammette anch'essa un gruppo – diciamolo G'_q – di automorfismi, le cui traiettorie sono varietà di Picard, e di cui le tra-

(2) Questa riduzione vale per *una* qualunque sostituzione generatrice di G_n, ma non (in generale) per le altre, se tali ve ne sono.

sformazioni sono quelle di prima specie su queste ultime. Però la congruenza a cui appartengono non è picardiana, bensí abeliana, essendo trasformata razionale d'una congruenza picardiana su V_p.

Questa W_p è caso particolare – in quanto i suoi plurigeneri non possono superare il valore uno – delle *varietà pseudo-abeliane* di tipo q [5]. Essa contiene una seconda congruenza, immagine della congruenza complementare giacente su V_p, ma in generale W_p non ammette altri automorfismi che quelli del gruppo G'_q.

Osserviamo ora che in questo caso I_n *non ammette coincidenze*. Difatti, non tutte le costanti b_i nelle (8′) possono annullarsi. E d'altra parte, per una varietà W_p superficialmente regolare, vale sempre la riduzione alla forma canonica (8″), con l'esclusione delle (8′), sicché in tal caso la corrispondente involuzione I_n possiede sempre delle coincidenze.

Dunque possiamo enunciare i seguenti risultati:

I) *Ogni varietà abeliana* W_p *d'irregolarità superficiale* q $(0 < q < p)$ *e dotata di qualche plurigenere uguale ad uno è pseudo-abeliana di tipo* q; *essa contiene una congruenza abeliana di varietà* V_q *di Picard, che sono traiettorie del gruppo* G'_q *inerente a* W_p, *ed una seconda congruenza (picardiana e costituita di varietà di Picard). L'involuzione* I_n *di cui* W_p *è l'immagine è sempre priva di coincidenze.*

Per quanto concerne le due congruenze su W_p, notiamo che, delle due congruenze corrispondenti su V_p, la prima non appartiene ma la seconda appartiene a I_n: indi le conclusioni.

II) *Sia* I_n *una involuzione sopra* V_p *che sia semplice, a plurigeneri non tutti nulli, e priva di coincidenze. Allora l'immagine* W_p *di* I_n *deve avere l'irregolarità superficiale* $q > 0$. *Se* $q = p$, W_p *è una varietà di Picard; in ogni altro caso* W_p *è pseudo-abeliana di tipo* q, *ed allora il gruppo* G_p *inerente a* V_p *contiene due sottogruppi* G_q, G_{p-q} *invarianti, le cui rispettive traiettorie sono varietà di Picard.*

10. VARIETÀ QUASI ABELIANE. – Fin qui è stato sottinteso che le funzioni abeliane di cui si tratta abbiano esattamente $2p$ periodi simultanei. Ma possiamo contemplare vari casi particolari di esse, e cioè delle funzioni meromorfe con meno di $2p$ periodi, per cui la regione fondamentale U_{2p} assume necessariamente delle forme degeneri. La teoria generale di tali funzioni – dette *quasi abeliane* – si inizia con Painlevé; una trattazione più esauriente, che comprende anche il punto di vista geometrico, devesi a Severi [6]. Le ricerche di Severi si concentrano sulle varietà quasi abeliane di rango uno (che converrebbe chiamarsi quasi picardiane); il suo teorema principale ci dice che ogni tale varietà è birazionalmente equivalente al prodotto d'una varietà di Picard ed uno spazio lineare. Per il legame tra questi risultati e quelli concernenti le varietà pseudo-abeliane, rimandiamo al lavoro recente [4] di Rosati.

Aggiungiamo in fine che i precedenti risultati, insieme a vari altri, appariranno in un lavoro di prossima pubblicazione che è dedicato alla memoria di Guido Castelnuovo.

Bibliografia.

[1] G. Bagnera–M. De Franchis, «Mem. Soc. Ital. Sc.», (3) *15*, 251 (1908).
[2] F. Conforto, *Abelsche Funktionen und algebraische Geometrie*, Berlin (1956).
[3] F. Enriques – F. Severi, «Acta Mathematica», *32*, 283 (1909); *33*, 321 (1910).
[4] M. Rosati, *Le funzioni e le varietà quasi abeliane dalla teoria del Severi ad oggi*, «Pont. Ac. Scripta Varia» (1962).
[5] L. Roth, *Sulla varietà di Picard e le sue applicazioni*, «Rend. Semin. Mat. e Fis., Milano», *30* (1960).
[6] F. Severi, *Funzioni quasi abeliane*, 2ª edizione, «Pont. Ac. Scripta Varia» (1961).

Summary. – The systematic classification of the Abelian varieties, with special reference to the superficially irregular types.