Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Emilio Clauser

Moto di una particella di prova elettrizzata e non gravitante nella teoria gravitazionale einsteiniana

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.1-2, p. 55–65.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_1-2_55_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Meccanica. — *Moto di una particella di prova elettrizzata e non gravitante nella teoria gravitazionale einsteiniana.* Nota di EMILIO CLAUSER, presentata (*) dal Socio B. FINZI.

Dalle equazioni di puro campo della teoria gravitazionale einsteiniana Infeld e Schild hanno dedotto la legge della geodetica per una particella di prova puramente gravitante, definita mediante un processo limite e rappresentata da un polo di primo ordine [1].

Chase ha esteso questo procedimento ad una particella di prova elettricamente carica, oltre che gravitante; dalle equazioni gravitazionali einsteiniane con tensore energetico identico al consueto tensore di energia elettromagnetica maxwelliana, egli ha infatti dedotto che il moto di questa particella è individuato da una linea oraria temporale soluzione della equazione tensoriale di Lorentz nello spazio-tempo riemanniano incurvato soltanto dalle masse e dal campo elettromagnetico indipendenti dalla particella stessa [3].

L'intera trattazione di Chase sussiste anche quando più particolarmente la particella di prova è soltanto gravitante; l'equazione tensoriale di Lorentz, sua conclusione, si riduce allora alla legge della geodetica, e ciò sia quando lo spazio-tempo riemanniano è incurvato da masse e da un campo elettromagnetico, sia quando, ancora più semplicemente, esso è incurvato soltanto da masse con che essa ridà il risultato di Infeld e Schild. Dalla trattazione di Chase resta invece necessariamente escluso il caso della particella di prova elettricamente carica e non gravitante.

In questa Nota risolvo appunto questo caso, che non mi risulta discusso altrove, completando così il quadro che contiene i risultati di Infeld e Schild, e di Chase. A tal fine, come nei lavori dianzi citati, considero dapprima una particella non di prova, la quale sia però elettricamente carica e non gravitante, contraddistinguendola con uno scalare reale q, positivo o negativo, sua carica intrinseca, e rappresentandola con un polo di primo ordine imposto al tensore fondamentale di uno spazio-tempo riemanniano $R_{(q)}$ il quale descriva una linea oraria temporale $L_{(q)}$ di $R_{(q)}$, incurvato non soltanto da masse e da un campo elettromagnetico indipendenti dalla particella, ma anche dalle azioni elettromagnetiche esercitate dalla particella stessa. Faccio poi tendere q a zero; nell'ipotesi che $R_{(q)}$ tenda al «campo base» $R_{(0)}$, soluzione delle equazioni di campo in assenza della particella e perciò da essa indipendente, $L_{(q)}$ tende ad una linea oraria temporale L di $R_{(0)}$, che suppongo regolare; identifico allora una particella di prova di massa intrinseca nulla ed elettricamente carica ad un corpuscolo di linea oraria L. Per determinare L procedo analogamente agli Autori citati, ritenendo innanzitutto il tensore fondamen-

(*) Nella seduta del 17 giugno 1965.

tale di $R_{(q)}$ sviluppabile in una serie di potenze intere di q, convergente per valori di q prossimi allo zero in un conveniente intorno di un opportuno tubo di flusso che abbraccia $L_{(q)}$, ed esterno ad esso; le equazioni di campo si spezzano allora in due gruppi: quello costituito dalle equazioni tensoriali del campo base, e quello formato dalle equazioni (non tensoriali) che raggruppano i termini dipendenti dal parametro q. L'equazione della linea oraria L della particella di prova considerata consegue allora dal sistema di equazioni ottenuto da questo secondo gruppo, dividendone ambo i membri per q e facendo successivamente tendere a zero q stesso. Precisamente, per l'integrabilità di questo sistema in un conveniente intorno di L risulta necessario che la linea oraria L nel campo base di una particella di prova elettricamente carica e non gravitante, identificata ad un polo di primo ordine, soddisfi ad una equazione di struttura identica alla equazione tensoriale di Lorentz, dove però, in luogo del limite del rapporto fra carica elettrica e massa, compare una costante di ragguaglio che è la medesima per tutte queste particelle di prova e di misura disponibile, purché non nulla.

1. LE EQUAZIONI DI CAMPO IN PRESENZA DI UNA PARTICELLA DI PROVA ELETTRIZZATA E NON GRAVITANTE. – Le equazioni di campo della teoria gravitazionale einsteiniana sono le seguenti:

$$A_{\alpha\beta} + \chi\, E_{\alpha\beta} = 0\,; \tag{1}$$

$$g_{\alpha\beta/\nu} \equiv g_{\alpha\beta,\nu} - g_{\alpha\sigma}\, \Gamma^{\sigma}_{\nu\beta} - g_{\sigma\beta}\, \Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} = 0\,; \tag{2}$$

in esse

$$A_{\alpha\beta} \equiv R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R g_{\alpha\beta}\,, \tag{3}$$

$$R_{\alpha\beta} \equiv \Gamma^{\sigma}_{\alpha\sigma,\beta} - \Gamma^{\sigma}_{\alpha\beta,\sigma} + \Gamma^{\sigma}_{\alpha\lambda}\, \Gamma^{\lambda}_{\sigma\beta} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}\, \Gamma^{\sigma}_{\lambda\sigma} \qquad (\alpha\,,\beta = 0\,,1\,,2\,,3), \tag{4}$$

diconsi rispettivamente generica componente del tensore gravitazionale e del tensore di Riemann contratto costruito con i simboli di Christoffel di seconda specie

$$\Gamma^{\lambda}_{c\beta} \equiv \frac{1}{2} g^{\lambda\sigma} (g_{\alpha\sigma,\beta} + g_{\sigma\beta,\alpha} - g_{\alpha\beta,\sigma})\,, \tag{5}$$

soluzione delle (2), ed

$$R \equiv R_{\alpha\beta}\, g^{\alpha\beta} \tag{6}$$

è l'invariante lineare del tensore contratto di Riemann:

$$\chi \equiv 8\,\pi h\, c^{-4} \tag{7}$$

è una costante universale di ragguaglio, essendo h la costante di Cavendish e c la velocità della luce nel vuoto rispetto ad un osservatore inerziale che si avvale di orologi normali. $E_{\alpha\beta}$ è infine il tensore energetico; esso nel caso in esame si riduce al tensore di energia elettromagnetica maxwelliana, definito nella metrologia gaussiana da

$$(8) \qquad E_{\alpha\beta} \equiv F_{\alpha\sigma} F^{\sigma}_{\cdot\beta} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} F_{\varrho\sigma} F^{\varrho\sigma} \equiv F_{\alpha\sigma} F_{\varrho\beta} g^{\varrho\sigma} + \frac{1}{4} g_{\alpha\beta} g^{\lambda\varrho} g^{\eta\sigma} F_{\varrho\sigma} F_{\lambda\eta},$$

essendo $F_{\alpha\beta}$ la generica componente del tensore (emisimmetrico) elettromagnetico, soluzione esternamente alle cariche del sistema delle equazioni tensoriali di Maxwell nel vuoto

$$(\mathrm{I}) \qquad F^{\sigma}_{\alpha\cdot/\sigma} = 0 \quad ; \quad F_{\alpha\beta/\gamma} + F_{\beta\gamma/\alpha} + F_{\gamma\alpha/\beta} \equiv F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta} = 0 \text{ (1)}.$$

Ciò posto, consideriamo uno spazio–tempo riemanniano $R_{(q)}$ individuato da un tensore fondamentale le cui componenti

$$(9) \qquad g_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta}(x^0, x^1, x^2, x^3, q)$$

dipendano oltre che dalle coordinate spazio–temporali x^0, x^1, x^2, x^3, anche da un parametro reale q, carica elettrica di una particella non gravitante, e presentino un polo di ordine per ora imprecisato in ogni punto di una linea oraria $L_{(q)}$ di $R_{(q)}$, ma di ordine invariabile da punto a punto di $L_{(q)}$. Supponiamo verificate le seguenti condizioni:

a) la generica componente $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$ del tensore fondamentale del campo base si ottiene annullando q nella (9), ed è una funzione analitica in ogni punto di una linea oraria L limite della linea $L_{(q)}$ per q tendente a zero, ed in un conveniente intorno di L;

b) per un punto P esterno ad L passa un arco di geodetica a carattere spaziale, che interseca ortogonalmente L. Diremo allora $L_{(q)}$ linea oraria di una particella elettrizzata, ed L linea oraria della corrispondente particella di prova;

c) è $\lim_{q \to 0} g_{\alpha\beta}(x^0, x^1, x^2, x^3, q) = \overset{0}{g}_{\alpha\beta} \equiv g_{\alpha\beta}(x^0, x^1, x^2, x^3, 0)$;

d) esternamente ad un conveniente tubo di flusso che abbraccia $L_{(q)}$ ed in un suo intorno opportuno, le (9) si possono sviluppare nelle serie

$$(10) \qquad g_{\alpha\beta} = \overset{0}{g}_{\alpha\beta} + q \overset{1}{g}_{\alpha\beta} + q^2 \overset{2}{g}_{\alpha\beta} + \cdots,$$

uniformemente convergenti in corrispondenza ad ogni valore reale di q appartenente ad un conveniente intorno del valore $q = 0$; grazie all'ipotesi ammessa per la (9), i coefficienti delle successive potenze di q hanno un polo

(1) Cfr. ad esempio, cap. XI e cap. XII del loco citato in [3]. Qui e nel seguito, la virgola indica derivazione parziale ordinaria rispetto a coordinate spazio–temporali x^0, x^1, x^2, x^3 di ugual indice; la sbarra derivazione tensoriale. Come per le formule tensoriali, anche per quelle non tensoriali verrà omesso il simbolo di sommatoria relativo ad indici uguali e comunque collocati; infine gli indici greci qui e nel seguito assumono i valori 0, 1, 2, 3, gli indici latini i soli valori 1, 2, 3.

del medesimo ordine in ogni punto di $L_{(q)}$. Grazie alla (10) è poi verificata l'ipotesi *c*), essenziale in questo procedimento [(2)];

e) in ogni punto di $L_{(q)}$ il tensore elettromagnetico della particella ha un polo che rappresenti una carica elettrica puntiforme di linea oraria $L_{(q)}$ in $R_{(q)}$.

Come è possibile, attribuiamo infine dimensione di lunghezza a ciascuna coordinata spazio–temporale x^α, assumendo in particolare come coordinata temporale x^0 il tempo römeriano ct; le componenti del tensore fondamentale dello spazio–tempo $R_{(q)}$ e del campo base $R_{(0)}$ sono allora puri numeri.

2. Le equazioni caratteristiche della particella di prova. – Grazie alla (10) e per le (4), (5) e (6), la generica componente (3) del tensore gravitazionale si può esprimere formalmente mediante una serie di potenze del parametro reale q, ad esponenti interi e positivi. La linearità delle equazioni di Maxwell (1) permette di rappresentare così la generica componente $F_{\lambda\sigma}$ del tensore elettromagnetico soluzione delle (1) in $R_{(q)}$

$$F_{\lambda\sigma} = {}_{e}F_{\lambda\sigma} + {}_{p}F_{\lambda\sigma} \equiv {}_{e}F_{\lambda\sigma} + q\, {}^{*}F_{\lambda\sigma}, \tag{11}$$

essendo ${}_{e}F_{\lambda\sigma}$ la generica componente del tensore elettromagnetico indipendente dalla particella (non di prova), ed ${}_{p}F_{\lambda\sigma}$ l'analoga componente del campo elettromagnetico generato dalla particella considerata, che riterremo proporzionale a q, con che ${}^{*}F_{\lambda\sigma}$ dipende dalla particella, ma non da q. Analogamente alla componente (3) del tensore gravitazionale, per la (10) e per la (11) anche la generica componente (8) del tensore di energia elettromagnetica maxwelliana si può esprimere formalmente mediante una serie di potenze di q. Riterremo poi che questi due sviluppi in serie abbiano un campo di uniforme convergenza comune con quello dianzi supposto per lo sviluppo (10). Ivi il primo membro della (1) si può allora esprimere mediante una serie di potenze di q ad esponenti interi e positivi, con il primo termine indipendente da q; la (1) si spezza così nella equazione tensoriale (1), riferita al campo base, ed in un sistema di equazioni non tensoriali.

Da quest'ultimo, dividendo per q ambo i membri e facendo successivamente tendere a zero q, consegue:

$$\overset{1}{A}_{\alpha\beta} = -\chi\, \overset{1}{E}_{\alpha\beta}\,, \qquad \text{con} \tag{12}$$

$$\overset{1}{A}_{\alpha\beta} \equiv \overset{1}{R}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\, \overset{0}{g}_{\alpha\beta}\, \overset{1}{R}_{\lambda\sigma}\, \overset{0}{g}{}^{\lambda\sigma} + \overset{1}{B}_{\alpha\beta}\,, \qquad \text{essendo} \tag{13}$$

$$\overset{1}{B}_{\alpha\beta} \equiv -\frac{1}{2}\, \overset{0}{R}{}^{\lambda\sigma} \left(\overset{1}{g}_{\lambda\sigma} \overset{0}{g}_{\alpha\beta} + \overset{0}{g}_{\lambda\sigma} \overset{1}{g}_{\alpha\beta} \right). \tag{14}$$

(2) Come nelle (10), anche in qualunque espressione del seguito ogni fattore delle successive potenze di q sarà contraddistinto da un indice ad esso sovrapposto; una quantità che non dipende da q, la quale riguarda quindi esclusivamente il campo base, sarà invece contraddistinta da un indice zero ad essa sovrapposto.

Introducendo nella (2) lo sviluppo (10) arrestato ai termini di primo grado in q, risulta

$$\overset{1}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \overset{0}{g}{}^{\lambda\sigma} (\overset{1}{g}_{\alpha\sigma,\beta} + \overset{1}{g}_{\sigma\beta,\alpha} - \overset{1}{g}_{\alpha\beta,\sigma}) . \tag{15}$$

Tenendo conto nella (4), delle (5) riferite al campo base, e delle (15), si può calcolare $\overset{1}{R}_{\alpha\beta}$, e successivamente esplicitare il primo membro delle (12), definito dalla (13). Dalla (8), per la (10) e per la (11), si trae infine:

$$\begin{aligned}\overset{1}{E}_{\alpha\beta} = {}& {}_e F_{\alpha\sigma}\, {}_e F_{\mu\beta}\, \overset{1}{g}{}^{\mu\sigma} + \overset{0}{g}{}^{\mu\sigma} ({}_e F_{\alpha\sigma}\, {}^* F_{\mu\beta} + {}^* F_{\alpha\sigma}\, {}_e F_{\mu\beta}) + \\ & + \frac{1}{4}\, {}_e F_{\varrho\sigma}\, {}_e F_{\lambda\eta} (\overset{0}{g}_{\alpha\beta}\, \overset{1}{g}{}^{\lambda\varrho}\, \overset{0}{g}{}^{\eta\sigma} + \overset{1}{g}_{\alpha\beta}\, \overset{0}{g}{}^{\lambda\varrho}\, \overset{0}{g}{}^{\eta\sigma} + \overset{0}{g}_{\alpha\beta}\, \overset{0}{g}{}^{\lambda\varrho}\, \overset{1}{g}{}^{\eta\sigma}) + \\ & + \frac{1}{4}\, \overset{0}{g}_{\alpha\beta}\, \overset{0}{g}{}^{\lambda\varrho}\, \overset{0}{g}{}^{\eta\sigma} ({}_e F_{\varrho\sigma}\, {}^* F_{\lambda\eta} + {}^* F_{\varrho\sigma}\, {}_e F_{\lambda\eta}), \quad \text{essendo} \\ & \overset{1}{g}{}^{\mu\sigma} = - \overset{1}{g}_{\gamma\varrho}\, \overset{0}{g}{}^{\gamma\mu}\, \overset{0}{g}{}^{\varrho\sigma} .\end{aligned} \tag{16}$$

3. SCELTA DEL RIFERIMENTO SPAZIO–TEMPORALE PER IL CAMPO BASE. – Come è possibile grazie alla ipotesi *b*) del § 1, e grazie alla supposta regolarità della linea oraria L della particella di prova, riferiamo il campo base a coordinate geodetiche (o di Fermi) relative ad L, con che in ogni punto di L è

$$\overset{0}{g}_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} \quad ; \quad \overset{0}{g}_{\alpha\beta,\gamma} = 0 , \quad \text{con} \quad \eta_{00} = 1 , \ \eta_{0i} = 0 , \ \eta_{ik} = - \delta_{ik} \ [4]. \tag{II}$$

Grazie alle (II) in un generico punto del campo base è allora

$$\overset{0}{g}_{\alpha\beta} \equiv \eta_{\alpha\beta} + \overset{0}{a}_{\alpha\beta} \qquad \text{con} \quad (\overset{0}{a}_{\alpha\beta})_L \equiv 0 \quad , \quad (\overset{0}{a}_{\alpha\beta,\gamma})_L \equiv 0. \tag{III}$$

Indicando la generica delle precedenti coordinate geodetiche ancora con x^α, siano

$$x^s = \xi^s (x^0) \qquad (s = 1 , 2 , 3) \tag{17}$$

le equazioni parametriche di L. Particolarizziamo ulteriormente il riferimento geodetico introdotto con la condizione che in un punto Q di L prefissato ad arbitrio, sia

$$\xi^s (\bar{x}^0) \equiv \left(\frac{d\xi^s}{dx^0}\right)_Q = 0 , \tag{18}$$

essendo $\bar{x}^\alpha$ la generica delle coordinate spazio–temporali di Q nel riferimento geodetico così precisato.

4. CARATTERIZZAZIONE ANALITICA DELLA PARTICELLA DI PROVA ELETTRIZZATA E NON GRAVITANTE. – Introducendo le combinazioni lineari

$$\overset{1}{\gamma}_{\alpha\beta} \equiv \overset{1}{g}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} \overset{1}{g}_{\lambda\nu}\, \eta^{\lambda\nu} , \tag{19}$$

indicando con Δ l'operatore di Laplace in coordinate cartesiane ortogonali dell'ordinario spazio euclideo tridimensionale, le (12), grazie alle (III), e per le (13), (4), (5) e (15), assumono la forma seguente:

$$
(\mathrm{IV})\qquad
\begin{cases}
\Delta\overset{1}{\gamma}_{00} - \overset{1}{\gamma}_{ms,ms} - 2\,\overset{1}{\Lambda}_{00} = 2\,\chi\overset{1}{\mathrm{E}}_{00} \\[4pt]
\Delta\overset{1}{\gamma}_{0i} - \overset{1}{\gamma}_{0s,si} - \overset{1}{\gamma}_{is,s0} + \overset{1}{\gamma}_{00,i0} - 2\,\overset{1}{\Lambda}_{0i} = 2\,\chi\overset{1}{\mathrm{E}}_{0i} \\[4pt]
\Delta\overset{1}{\gamma}_{ik} - \overset{1}{\gamma}_{is,ks} - \overset{1}{\gamma}_{ks,is} + \delta_{ik}\,\overset{1}{\gamma}_{ms,ms} + \overset{1}{\gamma}_{0i,0k} + \overset{1}{\gamma}_{0k,0i} - 2\,\delta_{ik}\,\overset{1}{\gamma}_{0s,0s} + \\
\qquad - \overset{1}{\gamma}_{ik,00} + \delta_{ik}\,\overset{1}{\gamma}_{00,00} - 2\,\overset{1}{\Lambda}_{ik} = 2\,\chi\,\overset{1}{\mathrm{E}}_{ik}\,;
\end{cases}
$$

in questo sistema, $2\,\overset{1}{\Lambda}_{\alpha\beta}$ indica l'insieme dei termini della (13) che dipendono anche dalle quantità $\overset{0}{a}_{\alpha\beta}$ definite dalla (III), e quindi in particolare include anche tutti i termini della (14); $\overset{1}{\mathrm{E}}_{\alpha\beta}$ è infine precisato dalla (16). Per il seguito è opportuno sostituire nel sistema (IV) le sue attuali variabili indipendenti, che sono le coordinate geodetiche x^α dianzi indicate, con le variabili

$$
(\mathrm{V})\qquad x^0,\ z^s \equiv x^s - \xi^s(x^0);
$$

ciò è possibile poiché le due quaterne (V) ed x^α si corrispondono biunivocamente. Posto allora

$$
(20)\qquad r^2 \equiv \sum_1^3{}_k\,(z^k)^2\,,
$$

diremo ordine p di una funzione $f(z^1, z^2, z^3, x^0)$ il massimo numero reale p in corrispondenza al quale esista e sia finito il $\lim\limits_{r\to 0} fr^{-p}$; introdotto un sistema di coordinate geografiche $\mathrm{O}\,, r\,, \vartheta\,, \varphi$ dell'ordinario spazio euclideo tridimensionale, particolari funzioni di ordine p sono quelle rappresentabili in un conveniente intorno di O, O eventualmente escluso, con le funzioni

$$
(21)\qquad \underset{p}{f} \equiv r^p\,{}_p\psi\,(\vartheta\,, \varphi\,, x^0),
$$

ove ${}_p\psi$ è una funzione disponibile. Diremo le (21) funzioni di ordine proprio p, e le denoteremo anche in seguito con un indice sottostante il simbolo di funzione [5]. In particolare, grazie all'ipotesi *a*) del § 1, ed alla seconda ed alla terza delle (III), in un conveniente intorno di L è

$$
\overset{0}{a}_{\alpha\beta} = \overset{0}{a}_{\alpha\beta ik}\,(x^0)\,z^i\,z^k + \cdots;
$$

per le (20) $\overset{0}{a}_{\alpha\beta}$ è quindi una funzione di ordine 2.

Dal § I e per la (19) segue che alla linea oraria L di una particella di prova elettrizzata e non gravitante, è imposta la duplice condizione di permettere al sistema (IV), nell'ipotesi *a*) dello stesso paragrafo, di avere una soluzione in un conveniente intorno di L costituita da funzioni $\overset{1}{\gamma}_{\alpha\beta}$ delle quali almeno una abbia un polo di ordine prefissato in ogni punto di L. Imponiamo a questo polo di essere del primo ordine. In un opportuno intorno di L, $\overset{1}{\gamma}_{\alpha\beta}$ si può allora rappresentare come somma di una funzione $\underset{-1}{\overset{1}{\gamma}}_{\alpha\beta}$ (ossia di ordine proprio — 1) con una funzione $\overset{1}{H}_{\alpha\beta}$ ivi derivabile parzialmente rispetto ad ogni sua variabile indipendente sino alle derivate parziali seconde incluse, per essere il sistema (IV) di secondo ordine rispetto a tutte le variabili indipendenti x^α, e quindi pure rispetto alle variabili (V). In I, $\overset{1}{H}_{\alpha\beta}$ si può pertanto sviluppare rispetto alle tre variabili z^s mediante la formula di Mac–Laurin arrestata alle derivate parziali seconde; ivi $\overset{1}{H}_{\alpha\beta}$ è dunque una funzione di ordine non inferiore a zero, e si può quindi rappresentare in I come somma di una funzione $\underset{0}{\overset{1}{\gamma}}_{\alpha\beta}$ di ordine proprio zero, con una funzione $\overset{1}{h}_{\alpha\beta}$ di ordine uguale o maggiore di uno. In definitiva, L è dunque sottoposta alla duplice condizione di permettere al sistema (IV), nell'ipotesi *a*), una soluzione rappresentabile in un opportuno intorno I di L con le funzioni

$$\overset{1}{\gamma}_{\alpha\beta} = \underset{-1}{\overset{1}{\gamma}}_{\alpha\beta} + \underset{0}{\overset{1}{\gamma}}_{\alpha\beta} + \overset{1}{h}_{\alpha\beta} \qquad (\alpha\,,\beta = 0\,,1\,,2\,,3). \tag{22}$$

5. CONTRIBUTO DELLA PARTICELLA DI PROVA AL TENSORE ENERGETICO. – Determiniamo ora i due addendi di ordine proprio più basso della generica componente ${}_pF_{\lambda\sigma}$ del campo elettromagnetico maxwelliano generato da una particella non di prova, elettricamente carica e non gravitante. Esplicitiamo a tal fine la prima delle equazioni di Maxwell (I) sostituendo in essa lo sviluppo (10), e con $\overset{0}{g}_{\alpha\beta}$ espresso dalla prima delle (III). Detto h l'ordine di ${}_pF_{\lambda\sigma}$ e ricordando che per la (11) ${}_pF_{\lambda\sigma}$ è supposto proporzionale a q, la prima delle equazioni di Maxwell (I) si esprime allora così

$$\eta^{\nu\sigma}\,{}_pF_{\alpha\sigma,\nu} + \cdots = 0, \tag{23}$$

i puntini indicando addendi di ordine superiore ad h ed addendi dipendenti da potenze di q di grado superiore al primo. Le equazioni dei due ordini più bassi (h — I) ed h, tratte dalla (23), risultano cosí le seguenti

$$\eta^{\nu\sigma}\,{}_p\underset{l}{F}_{\alpha\sigma,\nu} = 0 \qquad (l = h\,, h+1), \tag{24}$$

e coincidono quindi con le equazioni che in un riferimento inerziale Ω dello spazio–tempo pseudoeuclideo impongono al tensore elettromagnetico di essere solenoidale. Ora l'integrale generale della seconda delle (I) è espresso da

$${}_pF_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha/\beta} - \varphi_{\beta/\alpha} \equiv \varphi_{\alpha,\beta} - \varphi_{\beta,\alpha}\,,$$

con φ_α vettore arbitrario dello spazio–tempo pseudoeuclideo. Consideriamo allora il campo elettromagnetico maxwelliano creato da una carica puntiforme q, genericamente mobile rispetto ad Ω. Sostituiamo successivamente nella (24) lo sviluppo in serie di x^0 del relativo potenziale spazio–temporale di componente generica φ_α, riferendolo ad Ω, ritardato, anticipato e della loro semisomma. Riferiamoci d'ora in poi all'istante $\bar{x}^0$. Si constata allora facilmente che ad ${}_p\underset{l}{\mathrm{F}}_{\alpha\sigma}$ contribuisce soltanto il primo termine di φ_0, il quale è comune a tutti gli sviluppi in serie precedenti e vale qr^{-1} [6]. Nella (24) è allora $h = -2$; per $l = h = -2$ la soluzione della (24) è espressa da

$$\text{(VII)} \qquad {}_p\underset{-2}{\mathrm{F}}_{ik} = 0 \quad , \quad {}_p\underset{-2}{\mathrm{F}}_{0k} = q\overset{-1}{r}_{,k} .$$

Per le (VII), dalla (16) segue

$$\text{(25)} \qquad \underset{-q}{\overset{1}{\mathrm{E}}}_{\alpha\beta} = 0 \qquad \text{per} \quad q \geq 3 ,$$

$$\text{(26)} \qquad \underset{-2}{\overset{1}{\mathrm{E}}}_{0\alpha} = -\overset{-1}{r}_{,s}\ {}_e\bar{\mathrm{F}}^{s}_{\cdot\alpha} \quad , \quad \underset{-2}{\overset{1}{\mathrm{E}}}_{ik} = \overset{-1}{r}_{,k}\ {}_e\bar{\mathrm{F}}^{i}_{\cdot 0} + \overset{-1}{r}_{,i}\ {}_e\bar{\mathrm{F}}^{k}_{\cdot 0} - \delta_{ik}\overset{-1}{r}_{,s}\ {}_e\bar{\mathrm{F}}^{s}_{\cdot 0} ,$$

il soprassegno indicando che la quantità da esso affetta è valutata nella posizione occupata dalla particella di prova.

6. Deduzione della legge di moto della particella di prova elettrizzata e non gravitante. – Grazie alle (22), (25) e (26), in un conveniente intorno spaziale I* di Q il sistema (V) si spezza in un sistema differenziale di funzioni incognite $\overset{1}{h}_{\alpha\beta}$ ed in due ulteriori sistemi S_3 ed S_2 di rispettivi ordini propri -3 e -2, intendendo per ordine di una equazione l'ordine proprio comune ai termini che vi intervengono tenendo conto delle eventuali derivazioni alle quali i termini stessi sono sottoposti, e per ordine di un sistema il minore degli ordini delle equazioni che lo costituiscono, oppure quello comune a tutte le equazioni del sistema stesso. Supposti integrabili in un conveniente intorno I* di Q i due sistemi S_3 e S_2, ed indicando con ${}^*\underset{-q}{\overset{1}{\gamma}}_{\alpha\beta}$ $(q = +3, +2)$ la generica funzione di un sistema soluzione in I* di S_3 e di S_2, nel medesimo intorno di Q costituiscono pure soluzioni di S_3 e di S_2 i seguenti sistemi di funzioni nei quali $\underset{-q+1}{b_\alpha}(z^1, z^2, z^3, x^0)$ indica una funzione prefissata ad arbitrio fra quelle di ordine $(-q+1)$ e parzialmente derivabile due volte rispetto a tutte le variabili indipendenti z^s ed x^0:

$$\text{(VIII)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \underset{-q}{\overset{1}{\gamma}}_{00} = {}^*\underset{-q}{\overset{1}{\gamma}}_{00} - \underset{-q+1}{b}_{0,p}\,\dot{\xi}^p + \underset{-q+1}{b}_{p,p} \quad ; \quad \underset{-q}{\overset{1}{\gamma}}_{0m} = {}^*\underset{-q}{\overset{1}{\gamma}}_{0m} + \underset{-q+1}{c}_{0m} , \quad \text{con} \\ \qquad\qquad \underset{-q+1}{c}_{0m} \overset{\text{def.}}{\equiv} \underset{-q+1}{b}_{0,m} - \underset{-q+1}{b}_{m,p}\,\dot{\xi}^p \quad \text{e} \quad \underset{-q+1}{c}_{m0} \overset{\text{def.}}{\equiv} \underset{-q+1}{c}_{0m} ; \\ \underset{-q}{\overset{1}{\gamma}}_{mn} = {}^*\underset{-q}{\overset{1}{\gamma}}_{mn} + \underset{-q+1}{b}_{m,n} + \underset{-q+1}{b}_{n,m} - \delta_{mn}\left(\underset{-q+1}{b}_{0,p}\,\dot{\xi}^p + \underset{-q+1}{b}_{p,p}\right) \qquad (m, n = 1, 2, 3) ; \end{array} \right.$$

risulta infatti che S3 ed S2 non impongono alcuna condizione alle $\underset{-q+1}{b_\alpha}$. Ad agevolare la determinazione delle condizioni di integrabilità in I* di S3 e di S2, imponiamo allora alle rispettive funzioni incognite $\underset{-q}{\overset{1}{\gamma}}{}_{\alpha\beta}$ $(q = +1, 0)$ di soddisfare alle quattro condizioni non tensoriali

$$(27) \qquad \eta^{\mu\nu} \overset{1}{\gamma}_{\alpha\mu,\nu} = 0,$$

le derivazioni essendo riferite alle coordinate geodetiche x^α. Ciò è possibile: le (27) espresse mediante le variabili indipendenti (V) impongono infatti alle soluzioni di S3 e di S2 le condizioni

$$(28) \qquad \underset{-q}{\overset{1}{\gamma}}{}_{\alpha s,s} + \underset{-q}{\overset{1}{\gamma}}{}_{\alpha 0,s}\, \dot{\xi}^s = \underset{-q-1}{\overset{\dot{1}}{\gamma}}{}_{\alpha 0} \qquad (\alpha = 0, 1, 2, 3), (q = 1, 0),$$

il puntino indicando derivazione parziale rispetto ad x^0; alle (28) si può soddisfare assumendo le soluzioni in I* di S3 e di S2 della forma (VIII), con le $\underset{-q+1}{b_\alpha}$ disponibili, con che le (28) si trasformano in un sistema di equazioni differenziali nelle $\underset{-q+1}{b_\alpha}$, che risulta incondizionatamente integrabile in un conveniente intorno I* di Q. Pertanto le equazioni (28) non soltanto sono compatibili con i due sistemi S3 ed S2, ma altresì in un conveniente intorno di Q le condizioni di integrabilità dei sistemi S3, S2 e (28) si riducono a quelle dei due sistemi S3 ed S2.

Equivalenti ai sistemi S3, S2 e (28), sono, come è facile constatare, i due seguenti:

$$\text{(IX)} \qquad (29) \quad \Delta \underset{-1}{\overset{1}{\gamma}}{}_{\alpha\beta} - \underset{-1}{\overset{1}{\gamma}}{}_{\alpha\beta,ms}\, \dot{\xi}^m \dot{\xi}^s = 0, \qquad (30) \quad \underset{-1}{\overset{1}{\gamma}}{}_{\alpha s,s} + \underset{-1}{\overset{1}{\gamma}}{}_{\alpha 0,s}\, \dot{\xi}^s = 0$$

$$\text{(IX)} \quad \begin{cases} (31) \quad \Delta \underset{0}{\overset{1}{\gamma}}{}_{\alpha\beta} - \underset{0}{\overset{1}{\gamma}}{}_{\alpha\beta,ms}\, \dot{\xi}^m \dot{\xi}^s = - \underset{-1}{\overset{1}{\gamma}}{}_{\alpha\beta,s}\, \ddot{\xi}^s - 2 \underset{-1}{\overset{\dot{1}}{\gamma}}{}_{\alpha\beta,s}\, \dot{\xi}^s + 2\chi \underset{-2}{\overset{1}{\mathrm{E}}}{}_{\alpha\beta} \\ (32) \quad \underset{0}{\overset{1}{\gamma}}{}_{\alpha s,s} + \underset{0}{\overset{1}{\gamma}}{}_{\alpha 0,s}\, \dot{\xi}^s = \underset{-1}{\overset{\dot{1}}{\gamma}}{}_{\alpha 0} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3), \end{cases}$$

con $\underset{-2}{\overset{1}{\mathrm{E}}}{}_{\alpha\beta}$ precisato dalla (26) e con tutte le $\ddot{\xi}^s$ nulle.

Stabiliamo condizioni di integrabilità dei sistemi (IX) e (X) relative ad un conveniente intorno I* del punto Q di L, di coordinate $\bar{x}^\alpha$ nel riferimento geodetico precisato alla fine del § 3. Integrando la (29) risulta all'istante $\bar{x}^0$

$$(33) \qquad \underset{-1}{\overset{1}{\gamma}}{}_{\alpha\beta} = \mathrm{D}_{\alpha\beta}\, r^{-1} \qquad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3),$$

con $\mathrm{D}_{\alpha\beta}$ costante arbitraria. Dalla (30) si trae allora che all'istante $\bar{x}^0$ è

$$\text{(XI)} \qquad \underset{-1}{\overset{1}{\gamma}}{}_{0k} = 0 \quad , \quad \underset{-1}{\overset{1}{\gamma}}{}_{ik} = 0.$$

Dalle (XI) e dalla (33) consegue pertanto che affinché il sistema (IV) ammetta una soluzione con un polo di primo ordine nel punto Q occorre che all'istante $\bar{x}^0$ sia

$$\overset{1}{\underset{-1}{\gamma}}_{00} = \mathrm{D} r^{-1}, \tag{34}$$

con D costante disponibile fra quelle non nulle. Dalla (31), per la seconda delle (XI) e per la terza delle (26), si trae, integrando, che all'istante $\bar{x}^0$ è

$$\overset{1}{\underset{0}{\gamma}}_{ik} = \chi\,({}_e\bar{\mathrm{F}}^{i}_{\cdot 0}\, r_{,k} + {}_e\bar{\mathrm{F}}^{k}_{\cdot 0}\, r_{,i} - \delta_{ik}\, r_{,s}\, {}_e\bar{\mathrm{F}}^{s}_{\cdot 0})\,, \tag{35}$$

nulla essendo la funzione armonica additiva della (35), perché di ordine proprio nullo, e regolare. Derivando ora parzialmente la (30) rispetto ad x^0, con $\alpha = 0$, e la (32) rispetto ad x^i con $\alpha = i$, risulta all'istante $\bar{x}^0$

$$\overset{i}{\underset{-1}{\gamma}}_{0s,s} + \overset{1}{\underset{-1}{\gamma}}_{00,s}\, \ddot{\xi}^s = 0\,; \tag{36}$$

$$\overset{1}{\underset{0}{\gamma}}_{is,is} = \overset{i}{\underset{-1}{\gamma}}_{0s,s}\,; \tag{37}$$

eliminando $\overset{i}{\underset{-1}{\gamma}}_{0s,s}$ fra la (36) e la (37), e sostituendo nell'equazione così ottenuta le determinazioni (34) e (35), risulta all'istante $\bar{x}^0$:

$$\mathrm{D}\, \ddot{\xi}^s = -2\,\chi\, {}_e\bar{\mathrm{F}}^{s}_{\cdot 0}\,, \qquad \text{con} \quad \mathrm{D} \neq 0. \tag{38}$$

Affinché i due sistemi (IX) e (X) siano integrabili in un conveniente intorno I* del punto Q di L occorre dunque che L soddisfi nel punto Q alla condizione (38). Ma la (38) è stabilita in ogni particolare riferimento di Fermi coordinato ad L che è precisato dalla (18). In un generico riferimento del campo base la condizione precedente è pertanto espressa dalla equivalente condizione che nel punto Q L soddisfi alla relazione tensoriale

$$\frac{d^2\xi^\alpha}{ds^2} + \overset{0}{\Gamma}{}^{\alpha}_{\lambda\mu} \frac{dx^\lambda}{ds} \frac{dx^\mu}{ds} = -2\,\chi \mathrm{D}^{-1}\, {}_e\bar{\mathrm{F}}^{\alpha}_{\cdot\lambda} \frac{dx^\lambda}{ds}\,. \tag{39}$$

Ma Q è un punto di L prefissato ad arbitrio. La (39) è pertanto l'equazione tensoriale che individua nel campo base la linea oraria L di una particella di prova elettrizzata e non gravitante, identificata ad un polo di primo ordine imposto alle $\overset{1}{\gamma}_{\alpha\beta}$ in ogni punto di L; essa è stata dedotta dalle equazioni di campo (1) e (2) tenendo conto della rappresentazione dianzi richiamata della particella di prova considerata. Ricordando poi che i due sistemi (IX) e (X) equivalgono al sistema costituito da S_2, da S_3 e dalla (28), e che le condizioni di integrabilità di questo sistema coincidono con quelle del sistema costituito soltanto da S_2 e da S_3, si può inoltre affermare che la condizione imposta ad L dalla (39) è necessaria per l'integrabilità in un conveniente intorno I* di Q, del sistema costituito da S_2 e da S_3. Nella (39), χ è la costante universale (7), D è invece una costante reale disponibile fra quelle non nulle, e, grazie alle (34), (19) e (10), identica per tutte le particelle di prova ivi considerate, ed infine dimensionata come il reciproco di un potenziale elettrico, per avere assunto puri numeri le componenti del tensore fondamentale di $R_{(g)}$ e del campo base. L'affermazione finale dell'introduzione risulta dunque provata, e concludo con essa.

BIBLIOGRAFIA.

[1] L. INFELD, A. SCHILD, *On the Motion of Test Particles in General Relativity*, « Reviews of Modern Physics », *21*, 408 (1949).

[2] D. M. CHASE, *The equations of Motion of Charged Test Particles in General Relativity*, « Physical Review », *95*, 243 (1954).

[3] B. FINZI–M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e Applicazioni*, Bologna (1961).

[4] E. FERMI, *Sopra i fenomeni che avvengono in vicinanza di una linea oraria*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », *31*, 21 e 51 (1922).

[5] E. CLAUSER, *Condizioni di integrabilità nel campo gravitazionale einsteiniano e moto di una particella di prova*, « Annali di Matematica pura ed applicata », LVI, 47 (1961).

[6] L. INFELD, *Electromagnetic and gravitational Radiation*, « Physical Review », *53*, 886 (1938).