Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesco Giacomo Tricomi

Un algoritmo iterativo per il calcolo della funzione seno

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.3-4, p. 146–150.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_3-4_146_0>

Analisi numerica. — *Un algoritmo iterativo per il calcolo della funzione seno.* Nota [*] del Socio FRANCESCO GIACOMO TRICOMI.

Nell'Istituto di Calcoli Numerici dell'Università di Torino abbiamo intrapreso, io e i miei collaboratori, un'estesa indagine sugli algoritmi iterativi pluridimensionali, nella speranza che da essi possano scaturire dei metodi di calcolo delle varie funzioni particolarmente appropriati all'impiego dei moderni calcolatori elettronici. Tale indagine non è facile perché, nel caso che maggiormente interessa: quello in cui la corrispondente trasformazione geometrica ha infiniti punti uniti, mancano dei metodi generali per determinare il limite (ammesso che esista) dell'algoritmo stesso.

Ben spesso tale limite appare connesso con certi prodotti infiniti [1]. In ispecie, nel caso di un algoritmo bidimensionale del tipo [2]

$$x_{n+1} = x_n f(z_n) \quad , \quad y_{n+1} = x_{n+1} g(z_n) \, , \quad (z_n = y_n / x_n \, ; \, n = 0, 1, 2, \cdots), \tag{1}$$

si vede subito che il limite X di x_n per $n \to \infty$ è dato (se esiste) dal prodotto infinito

$$\mathrm{X} = x_0 \prod_{n=0}^{\infty} f(z_n) \qquad \text{essendo} \quad z_{n+1} = g(z_n) \, . \tag{2}$$

Ponendosi da questo punto di vista si presenta spontanea l'idea di cercar di costruire un algoritmo convergente del tipo (1) cui corrisponda il più celebre e il più semplice dei prodotti infiniti: il prodotto infinito euleriano per la funzione *seno*:

$$\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi^2}{n^2}\right) \tag{3}$$

valido, com'è ben noto, qualunque sia ξ.

Dopo brevi sondaggi [3] si è così indotti a considerare l'algoritmo iterativo

$$\boxed{\begin{aligned} x_{n+1} &= (2\, x_n - y_n) \frac{y_n}{x_n} \\ y_{n+1} &= x_{n+1} \frac{x_n - y_n + \xi y_n}{x_n - y_n + \xi x_n} \end{aligned}} \tag{4}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 14 settembre 1965.

(1) Vedasi per esempio la mia Nota: *Sull'algoritmo iterativo del Borchardt e su una sua generalizzazione*. In corso di stampa nei « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo ».

(2) Ogni algoritmo iterativo in cui x_{n+1} e y_{n+1} sono funzioni omogenee di grado *uno* di x_n e y_n, rientra evidentemente in questo tipo.

(3) Consistenti, in sostanza, nel fare a ritroso i calcoli che seguono.

che rientra nel tipo (1) supponendo che sia

$$f(z) = z(2 - z) \quad , \quad g(z) = \frac{1 - (1 - \xi) z}{1 + \xi - z} \, ,$$

dove ξ è un parametro che potrebbe essere qualsiasi, ma che qui vogliamo supporre sia un numero reale compreso fra 0 ed 1; ciò che, considerate le proprietà della funzione $\sin(\pi\xi)$, non costituisce alcuna sostanziale restrizione.

Dall'equazione ricorrente per z_n che nel caso attuale è

$$z_{n+1} = \frac{1 - (1 - \xi) z_n}{1 + \xi - z_n} \, ,$$

si deduce subito l'uguaglianza

$$\frac{\xi}{1 - z_{n+1}} = \frac{\xi}{1 - z_n} + 1$$

donde segue senz'altro che

$$\frac{\xi}{1 - z_n} = \frac{\xi}{1 - z_0} + n \, .$$

Ciò induce a supporre che i dati iniziali x_0 , y_0 siano fissati in modo tale che risulti

(5) $$z_0 = \frac{y_0}{x_0} = 1 - \xi \, ,$$

ciò che porta con sé che sarà

$$\frac{\xi}{1 - z_n} = n + 1 \, ,$$

cioè

(6) $$z_n = 1 - \frac{\xi}{n + 1} \, ;$$

con la conseguenza intanto che, qualunque sia ξ, il limite di z_n per $n \to \infty$ risulterà uguale a 1.

Ciò posto osserviamo che dalla prima delle (4), cioè dall'equazione

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = z_n (2 - z_n) = 1 - \frac{\xi^2}{(n + 1)^2} \, ,$$

segue che

(7) $$\frac{x_n}{x_0} = \prod_{h=1}^{n} \left(1 - \frac{\xi^2}{h^2}\right) ,$$

epperò – stante la convergenza del prodotto infinito (3) – esiste il limite di x_n per $n \to \infty$ e questo limite (che coincide con quello di y_n perché già sappiamo che z_n tende a *uno*), che ora vogliamo indicare con λ, sara dato dalla formula

$$\lambda = x_0 \prod_{h=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\xi^2}{h^2}\right) = x_0 \frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} \, .$$

In conclusione, assumendo per semplicità $x_0 = 1$, cioè ponendo, tenuto conto della (5),

$$\boxed{x_0 = 1 \quad , \quad y_0 = 1 - \xi}, \tag{8}$$

si potrà asserire che il limite λ dell'algoritmo (4) sarà $\sin(\pi\xi)/\pi\xi$, cioè che si avrà

$$\boxed{\sin(\pi\xi) = \pi\xi\lambda}. \tag{9}$$

Questa è la ben semplice formula per il calcolo della funzione *seno* con l'algoritmo iterativo che forma oggetto di questa Nota.

Giova notare che dalle precedenti formule e dal fatto che da esse può trarsi che

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{x_{n+1}}{x_n} \frac{z_{n+1}}{z_n} \left[1 - \frac{\xi^2}{(n+1)^2}\right] \frac{1 - \xi/(n+2)}{1 - \xi/(n+1)} = 1 + \frac{\xi(1-\xi)}{(n+1)(n+2)}$$

si deduce che per $0 < \xi < 1$ è sempre

$$y_n < y_{n+1} < x_{n+1} < x_n ; \tag{10}$$

quindi le y_n approssimano, crescendo, il loro limite λ dalla sinistra, mentre le x_n lo approssimano, decrescendo, dalla destra.

Quanto sopra fornisce un concreto esempio, d'indubbio interesse, della connessione fra algoritmi iterativi e prodotti infiniti di cui si è detto in principio. Tuttavia l'algoritmo qui considerato, come mostra l'espressione (6) di z_n, converge troppo lentamente al suo limite λ per avere, nella forma di cui sopra, un'effettiva importanza pratica.

È però possibile, come in altri casi del genere, migliorare notevolmente l'approssimazione, sostituendo alla considerazione della coppia (x_n , y_n) quella di un'opportuna media di questi due numeri.

A tal fine cominciamo da una valutazione asintotica – anche in sè stessa non priva d'interesse – del « resto » ρ_n del prodotto euleriano (3), ponendo

$$\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi} = \rho_n \prod_{h=1}^{n} \left(1 - \frac{\xi^2}{h^2}\right) \tag{11}$$

il che implica

$$\rho_n = \left[1 - \frac{\xi^2}{(n+1)^2}\right] \left[1 - \frac{\xi^2}{(n+2)^2}\right] \cdots =$$

$$= 1 - \xi^2 \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{h^2} + \xi^4 \sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{h^2} \sum_{k=h+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} - \cdots$$

La prima somma si valuta asintoticamente (per $n \to \infty$) in modo facile servendosi della formula sommatoria di Euler applicata alla funzione x^{-2};

precisamente si trova così che è

$$\sum_{h=n+1}^{\infty} \frac{1}{h^2} = \frac{1}{n+1} + O(n^{-2}).$$

Con mezzi analoghi si vede che il coefficiente di ξ^4 e, a più forte ragione, i successivi sono $O(n^{-2})$; dunque si può asserire che è

$$\rho_n = 1 - \frac{\xi^2}{n+1} + O(n^{-2}). \tag{12}$$

Ciò posto osserviamo che dalla (7), ferma restando l'ipotesi $x_0 = 1$, si ha ora

$$\lambda = x_n \rho_n = x_n - \frac{\xi^2}{n+1} x_n + O(n^{-2}). \tag{13}$$

Similmente può porsi

$$\lambda = \frac{y_n}{z_n} \rho_n = y_n \left[1 - \frac{\xi^2}{n+1} + O(n^{-2})\right]\left[1 + \frac{\xi}{n+1} + O(n^{-2})\right] =$$

$$= y_n + \frac{\xi(1-\xi)}{n+1} y_n + O(n^{-2}),$$

equazione che, essendo

$$\frac{\xi(1-\xi)}{n+1} y_n = \frac{\xi(1-\xi)}{n+1} x_n z_n = \frac{\xi(1-\xi)}{n+1} x_n + O(n^{-2}),$$

può anche scriversi

$$\lambda = y_n + \frac{\xi(1-\xi)}{n+1} x_n + O(n^{-2}). \tag{14}$$

Dalla (13) e dalla (14) si deduce immediatamente che esiste una combinazione lineare di x_n e y_n che approssima λ meglio dei due numeri di partenza, e precisamente a meno di termini dell'ordine di n^{-2} invece che dell'ordine di n^{-1}. Precisamente basta moltiplicare la prima equazione per $1 - \xi$ e la seconda per ξ e sommare per vedere sparire i due termini col denominatore $n + 1$, ottenendo così la formula

$$\boxed{\lambda = (1-\xi) x_n + \xi y_n + O(n^{-2})}\,. \tag{15}$$

In altre parole, converrà assumere come *n–esima* approssimazione di λ non già x_n o y_n, bensì la loro media pesata:

$$\lambda_n = (1-\xi) x_n + \xi y_n \tag{16}$$

e calcolare il corrispondente valore approssimato di $\sin(\pi\xi)$ moltiplicando questo λ_n per $\pi\xi$. Si otterrà così un'approssimazione equivalente a quella che si otterrebbe servendosi del prodotto euleriano (3) con n fattori e col «resto» ρ_n valutato mediante la formula asintotica (12).

Nella tabellina seguente sono condensati i risultati di un calcolo di prova di sin $(\pi/6)$ (che è *un mezzo*) con l'algoritmo (4). Come si vede alla sesta iterazione l'errore si riduce a circa un decimillesimo.

n	x_n	y_n	λ_n	$\pi\xi\lambda_n$
1	0,97222	0,89120	0,95872	0,50198
2	0,96547	0,91183	0,95653	0,50084
3	0,96249	0,92239	0,95581	0,50046
4	0,96082	0,92879	0,95548	0,50029
5	0,95975	0,93309	0,95531	0,50020
6	0,95901	0,93618	0,95521	0,50014

Notiamo infine che se i dati iniziali, invece di soddisfare la (5), sono tali che risulti

$$\frac{\xi}{1-z_0}=\alpha\,,$$

cioè se è

$$z_0=\frac{y_0}{x_0}=1-\frac{\xi}{\alpha} \tag{17}$$

con un α generico; il prodotto euleriano (3) viene sostituito dall'altro

$$F(\xi\,,\alpha)=\prod_{n=0}^{\infty}\left[1-\frac{\xi^2}{(n+\alpha)^2}\right]$$

che non è difficile esprimere mediante la funzione *gamma*. Precisamente, appoggiandosi sulla definizione euleriana di quella funzione, si vede facilmente che è

$$F(\xi\,,\alpha)=\frac{[\Gamma(\alpha)]^2}{\Gamma(\alpha+\xi)\,\Gamma(\alpha-\xi)}\,. \tag{18}$$

L'algoritmo qui studiato può quindi servire anche per il calcolo numerico di questa funzione.