Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Wolfgang Gröbner

Sulle matrici risolventi di Picone che verificano la condizione di permutabilità

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.3-4, p. 167–169.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_3-4_167_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

Analisi matematica. — *Sulle matrici risolventi di Picone che verificano la condizione di permutabilità.* Nota [*] di WOLFGANG GRÖBNER, presentata dal Socio M. PICONE.

In una recente Nota [1] *Mauro Picone* ha richiamato il concetto di matrice risolvente di un sistema normale di equazioni differenziali lineari ordinarie

$$\frac{du}{dx} + au = f, \tag{1}$$

e osservato il fatto che tale matrice si ottiene nella forma semplice

$$e^{\int_x^\xi a(s)\,ds}$$

e cioè effettuando al più p^2 quadrature se la matrice quadrata $a = ((a_{hk}(x)))$ $(h, k = 1, 2, \cdots, p)$, ad elementi $a_{hk}(x)$ funzioni complesse della variabile reale x, continue nell'intervallo aperto A dell'asse reale x, verifica la *condizione di permutabilità*, se cioè le matrici $a(x)$ e $a(\xi)$, comunque si assumano x e ξ nell'intervallo A, riescono fra di loro permutabili:

$$a(x)\, a(\xi) = a(\xi)\, a(x). \tag{2}$$

Questo caso in cui il sistema (1) è risolvibile mediante sole quadrature può avere una notevole importanza anche dal punto di vista numerico, e si può porre la questione di determinare tutte le matrici quadrate d'ordine p che verificano la condizione di permutabilità (2). La risposta non è difficile tenendo conto di alcuni teoremi noti della teoria delle matrici.

Premettiamo che qualsiasi matrice $a(x)$, ad elementi funzioni di una (o anche più) variabili x, può essere rappresentata nella forma

$$a(x) = f_1(x)\, a_1 + f_2(x)\, a_2 + \cdots + f_r(x)\, a_r \tag{3}$$

dove $a_1, \cdots, a_r$ designano matrici dello stesso ordine di $a(x)$, ad elementi numeri complessi, linearmente indipendenti nel campo C dei numeri complessi, e $f_1(x), \cdots, f_r(x)$ funzioni di x, linearmente indipendenti nello stesso campo. Si ha $r \leq p^2$, se la matrice $a(x)$ è quadrata di ordine p. Quando assoggettiamo la (3) alla condizione (2) risulta

$$\sum_{h=1}^{r} \sum_{k=1}^{r} f_h(x)\, f_k(\xi)\, (a_h\, a_k - a_k\, a_h) = 0, \qquad (x, \xi \in A). \tag{4}$$

(*) Pervenuta all'Accademia il 4 settembre 1965.

(1) MAURO PICONE, *Sulla matrice risolvente di un sistema normale di equazioni differenziali lineari ordinarie, con la variabile indipendente reale*, questi « Rendiconti », vol. XXXVIII della serie VIII, fasc. 1 (gennaio 1965).

Tenendo conto che le funzioni $f_1(x), \cdots, f_r(x)$ sono linearmente indipendenti in C, nell'intervallo A, si vede facilmente che la (4) non può sussistere se non valgono le eguaglianze

$$a_h a_k = a_k a_h \qquad (h, k = 1, 2, \cdots, r). \tag{5}$$

Pertanto, la condizione necessaria e sufficiente affinché la matrice $a(x)$ verifichi la condizione di permutabilità (2), è che le matrici costanti $a_1, \cdots, a_r$ che appaiono nella rappresentazione (3) siano permutabili fra di loro. *La questione di determinare tutte le matrici verificanti la condizione di permutabilità* (2) *è quindi ridotta alla ricerca di tutti i sistemi di matrici* $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$, *quadrate di* p *righe e* p *colonne, ad elementi costanti e permutabili fra di loro.*

Osserviamo che il sistema $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ comprende tutte le matrici $c_1 a_1 + c_2 a_2 + \cdots + c_r a_r$ con $c_h \in C$ (C–modulo di dimensione r) che sono evidentemente tutte permutabili fra di loro. Le matrici $a_1, a_2, \cdots, a_r$ costituiscono una base del sistema stesso; esse possono essere sostituite dalle matrici

$$a_h^* = \sum_{k=1}^{r} c_{hk} a_k \qquad (h = 1, 2, \cdots, r)$$

quando $((c_{hk}))$ significa una qualsiasi matrice non degenere nel campo C dei numeri complessi.

Ogni sottomodulo di $\{a_1 a_2, \cdots, a_r\}$, generato da un sottoinsieme della base, costituisce pure un sistema di matrici permutabili, e inversamente ogni sistema permutabile è contenuto in un sistema *completo*, non contenuto in alcun altro più ampio. Per il nostro scopo basta quindi determinare *i sistemi completi di matrici costanti permutabili* (2).

Si possono distinguere due casi; nel primo supponiamo che il sistema $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ contenga una matrice

$$b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_r a_r \qquad (\gamma_h \in C)$$

le cui radici caratteristiche sono diverse fra di loro. Allora è ben noto (3) che il sistema completo di tutte le matrici permutabili con la b viene generato dalla base $\{\delta, b, b^2, \cdots, b^{p-1}\}$, essendo δ la matrice identica, e si ha quindi $r = p$. Questo risultato rimane valido anche se la matrice b possiede radici caratteristiche multiple purché sia di rango p, cioè abbia il polinomio minimo di grado p, coincidente con quello caratteristico.

Nel caso contrario, quando nel sistema $\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$ non esiste alcuna matrice di rango p, secondo un noto teorema di *Schur* (4), la dimensione r

(2) I sistemi permutabili completi contengono manifestamente insieme a due matrici a_h, a_k, anche i prodotti $a_h a_k$ e sono quindi anelli (algebre).

(3) Vedi per esempio il mio libro *Matrizenrechnung* (R. Oldenbourg, München 1956, S. 201).

(4) J. SCHUR, *Zur Theorie der vertauschbaren Matrizen*, « Journal f. reine u. angewandte Math. », Bd. 130 (1905), 66-76. Ringrazio la Sig.ra Olga Taussky-Todd per avermi indicato questo lavoro.

del sistema completo è, in generale, maggiore di p e si ha

$$r \leq \left[\frac{p^2}{4}\right] + 1 . \tag{6}$$

È facile dare un esempio per un sistema completo di matrici permutabili di ordine p la cui dimensione raggiunge il massimo indicato nella (6). Consideriamo tutte le matrici $a = ((a_{hk}))$ di ordine p che soddisfano alle condizioni

$$a_{hk} = 0 \quad \text{per} \quad 1 \leq h \leq m \quad \text{e} \quad m + 1 \leq k \leq p .$$

Ne esistono $m\,(p - m)$ linearmente indipendenti, e si verifica subito che il prodotto di due qualunque di queste matrici è nullo. Pertanto esse sono manifestamente permutabili e costituiscono un sistema completo quando si aggiunge la matrice identica.

Scegliendo in particolare $m = \left[\frac{p}{2}\right]$ risulta $r = \left[\frac{p^2}{4}\right] + 1$.