Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Beniamino Segre

## Intorno ad alcune forme algebriche su di un campo a caratteristica positiva

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **39** (1965), n.5, p. 219–223.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_5_219_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1965.

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

## DELLA ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI

Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali

*Seduta del 13 novembre 1965*

*Presiede il Presidente* BENIAMINO SEGRE

## NOTE DI SOCI

**Matematica.** — *Intorno ad alcune forme algebriche su di un campo a caratteristica positiva.* Nota [*] del Socio BENIAMINO SEGRE.

1. Siano $\gamma$ e $\delta$ rispettivamente un qualsiasi campo di caratteristica $p > 0$ e la sua chiusura algebrica. Posto

$$n = p^h \qquad \text{(con } h \text{ intero positivo)}, \tag{1}$$

l'equazione

$$b = a^n \tag{2}$$

determina in $\gamma$ una corrispondenza razionale $a \to b$, la quale risulta biunivoca nel campo $\gamma$ se $\gamma$ è perfetto ed è quindi sempre tale in $\delta$; ciò non ostante, la (2) si inverte razionalmente su $\gamma$ – e cioè è ivi birazionale – se, e soltanto se, $\gamma$ è un campo finito:

$$\gamma = \mathrm{GF}(q) \qquad \text{(con } q = p^k,\ k \text{ intero positivo)}. \tag{3}$$

Nell'$S_3(x_0, x_1, y_0, y_1)$ la superficie d'ordine $n + 1$:

$$y_0 x_1^n - y_1 x_0^n = 0 \tag{4}$$

è rigata, avendo l'asse $x$ $(y_0 = y_1 = 0)$ quale direttrice semplice e l'asse $y$ $(x_0 = x_1 = 0)$ quale direttrice $n$–pla. È chiaro come l'equazione (2) defi-

(*) Presentata nella seduta del 13 novembre 1965.

nisca la corrispondenza fra il punto $A(1, a, 0, 0)$, variabile sulla prima retta, ed il relativo piano tangente

$$y_1 = by_0 \tag{5}$$

(passante naturalmente per essa). Al mutare del piano (5) nel proprio fascio, la parte variabile (e cioè residua all'asse $x$) della sua sezione colla superficie (4) consta della generatrice passante per il relativo punto A di contatto da contarsi $n$ volte [onde quella sezione ha in A un punto $(n+1)$-plo]; poiché, in base alla (1), risulta $n \geq 2$, si vede così come il classico teorema di Bertini sulle componenti multiple delle curve di un sistema lineare sopra una superficie (valido in caratteristica zero) non possa venire esteso al caso attuale.

2. Presi due interi $r$, $s$ soddisfacenti alle $r \geq 1$, $2 \leq s \leq n$, denotiamo con $f(x_0, x_1, \cdots, x_r, y_0, y_1)$ una forma di grado $n+1$ nelle $r+3$ variabili

$$x_0, x_1, \cdots, x_r, y_0, y_1, \tag{6}$$

a coefficienti generici in $\gamma$, che risulti un polinomio (non omogeneo) di grado $n - s + 1$ rispetto alle $x_0$, $x_1$. È subito visto che, nell'$S_{r+2}$ delle variabili (6), la

$$y_0 x_1^n - y_1 x_0^n + f(x_0, x_1, \cdots, x_r, y_0, y_1) = 0 \tag{7}$$

definisce allora un'ipersuperficie, d'ordine $n+1$, la quale passa (semplicemente) per la retta $l$ di equazioni

$$x_2 = \cdots = x_r = y_0 = y_1 = 0$$

ed è non singolare in $\mathfrak{F}$ (come ad esempio tosto si verifica quando si assuma: $f = x_0 y_1^n + x_1 y_0^n + x_2^{n+1} + \cdots + x_r^{n+1}$).

In base al n. 1, l'iperpiano (5) di $S_{r+2}$ è ora quello che tocca la (7) nel punto $A(1, a, 0, \cdots, 0, 0)$ della retta $l$, le $a$ e $b$ essendo legate dalla (2); e la sezione di quell'iperpiano colla (7) varia in un fascio lineare, passando semplicemente per $l$ e possedendo nel relativo punto A di contatto un punto $s$-plo variabile (in quanto l'ipersuperficie $f = 0$ passa per $l$ colla molteplicità $s$). Se $s > 2$ si ha così che il classico più generale teorema di Bertini, relativo ai punti $s$-pli variabili delle ipersuperficie di un sistema lineare sopra una varietà algebrica, non può venire esteso nelle ipotesi attuali.

3. Il caso in cui si faccia $s = n$ presenta speciale interesse, poiché la sezione di cui alla fine del n. 2 risulta allora un monoide di vertice A, ed è quindi birazionale nel campo $\gamma(a)$, potendo venire riferita birazionalmente ad un $S_r$ su $\gamma$ mediante proiezione da A. Nell'ipotesi ammessa $s = n$, l'ipersuperficie (7) verrà brevemente denotata con F.

Avuto riguardo ai nn. 1, 2, ne discende tosto che:

*La* F *suddetta è una forma non singolare d'ordine* $n+1$ *di* $S_{r+2}$, *definita sul campo* $\gamma$, *riferibile ad un* $S_{r+1}$ *su* $\gamma$ *in una corrispondenza* R *razionale nel passaggio da* $S_{r+1}$ *ad* F. *La* R *è biunivoca se* $\gamma$ *è perfetto, e si prolunga in ogni caso in una corrispondenza (algebrica e) biunivoca sopra la chiusura algebrica* $\delta$ *di* $\gamma$. *Tuttavia,* R *risulta birazionale in* $\gamma$ *se, e soltanto se,* $\gamma$ *è finito. E si noti che la* F *non è certamente una varietà birazionale in* $\delta$, *qualora – com'è lecito in base alla* (1) *– si supponga* $n$ *abbastanza grande rispetto ad* $r$.

Va particolarmente segnalato il caso $r=3$, $n\geq 3$, in quanto esso porge una superficie F (non singolare e quindi) non birazionale in $\delta$, che tuttavia – a differenza di ciò che afferma in caratteristica zero un classico teorema di Noether – viene a contenere un fascio lineare di curve birazionali in $\delta$. Inoltre, assunto $n=2$ [ossia, in forza della (1), $p=2$, $h=1$], si ha senz'altro che:

*In uno spazio proiettivo di dimensione* $r+2\geq 3$, *definito sopra un campo* $\gamma$ *di Galois di caratteristica* 2, *esistono forme cubiche* F *– non singolari nella chiusura algebrica di* $\gamma$ *– che risultano birazionali in* $\gamma$ *(ed in ogni estensione algebrica di* $\gamma$*).*

4. Nell'ipotesi $s=n$, di cui al n. 3, la $f$ che compare nella (7) può venire scritta in modo più esplicito come segue:

$$f=\varphi(y_0, y_1, x_2, \cdots, x_r)+\psi(y_0, y_1, x_2, \cdots, x_r)\,x_0+ \tag{8}$$
$$+\chi(y_0, y_1, x_2, \cdots, x_r)\,x_1,$$

dove $\varphi, \psi, \chi$ denotano tre forme nelle $y_0, y_1, x_2, \cdots, x_r$, a coefficient genericamente scelti in $\gamma$, aventi in esse rispettivamente i gradi $n+1$, $n$, $n$.

Ammesso inoltre che valga la (3), ci proponiamo di determinare il numero N dei punti di $S_{r+2,q}$ – ossia a coordinate (6) in $\gamma$ – giacenti sulla forma F (di cui al n. 3). Si ha manifestamente

$$N=q+1+\sum_{\pi}\nu_\pi,$$

dove con $\nu_\pi$ si denoti il numero dei punti – non giacenti su $l$ – della sezione di F con un piano $\pi$ di $S_{r+2,q}$ che passi per $l$, il sommatorio essendo ivi da estendere a tutti i $q^r+q^{r-1}+\cdots+q+1$ piani $\pi$ siffatti.

Il punto descrivente un tale piano $\pi$ ha coordinate (6) che vengono a dipendere dai tre parametri omogenei $(x_0, x_1, \rho)$, fungenti da coordinate interne su $\pi$, quando si assuma

$$y_0=\rho c_0, y_1=\rho c_1, x_2=\rho c_2, \cdots, x_r=\rho c_r,$$

dove le $c$ designino $r+1$ elementi non tutti nulli di $\gamma$ comunque fissati (coordinate omogenee di $\pi$ nella stella di centro $l$). In virtù delle (7), (8), la sezione C di F e $\pi$ residua alla retta $l$ (la quale ultima ha l'equazione interna $\rho = 0$) viene fornita dalla:

$$c_0 x_1^n - c_1 x_0^n + \varphi(c) \rho^n + [\psi(c) x_0 + \chi(c) x_1] \rho^{n-1} = 0 . \tag{9}$$

Relativamente alla C, possono così manifestamente presentarsi solo i cinque casi (i) — (v) seguenti [i primi tre dei quali restano del tutto esclusi se $r = 1$; mentre poi – se $r > 1$ – questi hanno luogo quando, e soltanto quando, $\pi$ giace nell'$S_r$ base del fascio degli iperpiani (5) tangenti ad F nei punti di $l$].

$$c_0 = c_1 = \varphi(c) = \psi(c) = \chi(c) = 0 ; \tag{i}$$

attualmente $\pi$ giace su F e viceversa, se ciò ha luogo valgono le (i), onde corrispondentemente risulta $\nu_\pi = q^2$.

$$c_0 = c_1 = \psi(c) = \chi(c) = 0 \quad , \quad \varphi(c) \neq 0 ; \tag{ii}$$

in virtù della (9), C riducesi ora alla $l$ contata $n$ volte, sicché $\nu_\pi = 0$.

$$c_0 = c_1 = 0 , \qquad \psi(c) \text{ e } \chi(c) \text{ non entrambe nulle;} \tag{iii}$$

sotto queste ipotesi C si spezza nella $l$ da contarsi $n - 1$ volte ed in una retta ulteriore, eppertanto si ha $\nu_\pi = q$.

Nei casi rimanenti – avuto riguardo alle (1), (3) – è lecito porre

$$c_0 = a_0^n \quad , \quad c_1 = a_1^n ,$$

con $a_0 , a_1$ elementi non entrambi nulli di $\gamma$; giusta il n. 2, $\pi$ risulta allora tangente ad F nel punto A $(a_0 , a_1 , 0 , \cdots , 0 , 0)$ di $l$, e si presentano unicamente le seguenti due alternative.

$$a_0 \psi(c) + a_1 \chi(c) \neq 0 ; \tag{iv}$$

in base alla (9), C è ora una curva algebrica d'ordine $n$ avente in A un punto $(n - 1)$-plo, dotato ivi di una sola tangente, la quale va contata $n - 1$ volte e coincide colla $l$ ($\rho = 0$), onde si ottiene $\nu_\pi = q$.

$$a_0 \psi(c) + a_1 \chi(c) = 0 ; \tag{v}$$

avuto ancora riguardo alla (9), C viene attualmente ad avere in A un punto $n$-plo e – in un'opportuna estensione di $\gamma$ – si spezza quindi in rette per A, nessuna delle quali può coincidere colla $l$ [1]. Pertanto, detto $\sigma_\pi$ il numero di quelle distinte fra tali rette che risultano definite in $\gamma$, si ha $\nu_\pi = \sigma_\pi q$.

Dall'analisi precedente si ricava in conclusione che – designati con $u_1 , u_2$ i numeri dei piani $\pi$ che rispettivamente presentano i casi (i), (ii) e

(1) Se $h = 1$ (ossia $n = p$), l'equazione da cui viene a dipendere lo spezzamento di C in rette trovasi minutamente discussa in B. SEGRE, *Arithmetische Eingenschaften von Galois-Räumen*. I, «Math. Ann.», *154*, 195–256 (1964), § 3; analoga discussione potrebbe venire fatta per $h > 1$.

posto per abbreviare

$$v = \Sigma (\sigma_\pi - 1) , \tag{10}$$

dove la somma si intende estesa ai vari piani $\pi$ di tipo (v) –

*Per ogni $q = p^k$, il numero* N *dei punti distinti di* $S_{r+2,q}$ *che giacciono sulla forma* F, *definita nel n.* 3 (*ed avente $s = n$*), *si esprime colla:*

$$N = q^{r+1} + q^r + \cdots + q^3 + (1 + u_1) q^2 + (2 - u_1 - u_2 + v) q + 1 . \tag{11}$$

5. Nel caso particolare in cui si assuma $r = 1$ ed $n = 2$ (e quindi $p = 2$, $h = 1$), F è una *superficie cubica* non singolare sopra un campo $\gamma$ di Galois di caratteristica 2. In virtù del n. 4, attualmente si ha $u_1 = u_2 = 0$; ed i piani $\pi$ che presentano il caso (v) non sono altro che i piani per $l$ (definiti su $\gamma$) che toccano F in un suo punto di Eckardt.

Con facili argomentazioni si prova che, al variare dei coefficienti che compaiono nei polinomi $\varphi$, $\psi$, $\chi$ di cui al n. 4, in modo che F rimanga non singolare, il numero $\alpha$ di tali piani $\pi$ può precisamente assumere i valori $0, 1, 2, 3, 5$. Per un piano $\pi$ siffatto può poi soltanto risultare $\sigma_\pi = 0$ o $\sigma_\pi = 2$; e si constata agevolmente che – per un dato $\alpha$ e disponendo dei suddetti coefficienti – il numero $\beta$ di quei piani $\pi$ che hanno $\sigma_\pi = 2$ può precisamente assumere uno qualunque dei valori $0, 1, 2, \cdots, \alpha$, tranne nel caso $\alpha = 5$ in cui i valori assumibili da $\beta$ sono $0, 1, 2, 3, 5$. La (10) porge dunque

$$v = 2\beta - \alpha ,$$

onde la (11) fornisce il *numero dei punti giacenti sulla suddetta superficie cubica* F espresso dalla:

$$N = q^2 + \tau q + 1 ,$$

ove

$$\tau = 2 + 2\beta - \alpha$$

prende tutti e soli i valori interi dell'intervallo da $-3$ a $7$ (estremi inclusi), tranne $\tau = -2$ e $\tau = 6$ (2).

SUMMARY. — Study of certain primals over a field $\gamma$ of characteristic $p > 0$ to which the classical theorems by Bertini and by Noether do not apply. Some of these primals are birational in $\gamma$, without being birational in the algebraic completion of $\gamma$. Moreover, when $\gamma$ is finite the number of points lying on such a primal is here obtained.

(2) I risultati del presente numero possono venire raffrontati con quelli un po' meno circostanziati ottenuti per le superficie cubiche di $S_{3,q}$ che contengono una retta, relativi però al caso della caratteristica $p > 2$, in L. A. ROSATI, *Sul numero dei punti di una superficie cubica in uno spazio lineare finito*, « Boll. Un. Mat. Ital. », (3) *11*, 412–418 (1956), n. 2.