ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

RENDICONTI

CLAUDIO DI COMITE

Intorno a certe k -calotte di $S_{3,q}$ (q dispari)

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 39 (1965), n.5, p. 249–254.*
Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_5_249_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Geometria. — *Intorno a certe k-calotte di $S_{3,q}$ (q dispari)* (*).
Nota di CLAUDIO DI COMITE, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

In uno spazio di Galois $S_{3,q}$ (B. Segre [8]), ogni quadrica ellittica, com'è noto (B. Segre [6]), è un ovaloide, cioè una calotta d'ordine massimo. Viceversa, ogni ovaloide è una quadrica ellittica solo se q è dispari (B. Segre [6], A. Barlotti [1]), mentre, se q è pari ($q > 2$), esistono ovaloidi che non sono quadriche ellittiche (B. Segre [7]).

Mediante quadriche ellittiche, inoltre, B. Segre ha costruito in [6] k -calotte complete di $S_{3,q}$, tali che

$$(q^2 + q + 4)/2 \leq k \leq (q^2 + 3q + 6)/2.$$

In questo Nota, si utilizza una opportuna superficie del 3° ordine, per costruire certe k -calotte di $S_{3,q}$ (q dispari), non contenute in ovaloidi. In particolare si determinano 20-calotte complete di $S_{3,5}$, 36-calotte complete di $S_{3,9}$ e si riottengono le 8-calotte complete di $S_{3,3}$ già determinate da B. Segre in [6].

I. PRELIMINARI. — Nello spazio proiettivo a 3 dimensioni $S_{3,q}$, sopra il campo finito σ di caratteristica $p \neq 2$ e ordine $q = p^h$, si introduca un sistema di coordinate omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4) e siano O_i ($i = 1, 2, 3, 4$) i vertici del tetraedro fondamentale ed ω_i le relative facce opposte.

Si consideri la superficie F del 3° ordine di equazione $x_1 x_2 x_3 = x_4^3$. Gli unici punti multipli di F sono i punti O_j ($j = 1, 2, 3$); per ogni $j = 1, 2, 3$, O_j è doppio ed il cono tangente in O_j si spezza nei piani $\omega_{j'}$, $\omega_{j''}$, essendo j, j', j'' una permutazione di $1, 2, 3$; il piano ω_j interseca F nella retta $O_{j'} O_{j''}$, da contarsi tre volte; le tre rette $O_j O_{j'}$, $O_j O_{j''}$ di ω_4 sono le uniche rette appartenenti ad F . Considerato, ad esempio, il punto O_1 , ciascuna delle $(q-1)^2$ rette di $S_{3,q}$ per O_1 , non appartenenti ai piani $\omega_2, \omega_3, \omega_4$, interseca ulteriormente F in uno ed un solo punto, necessariamente in $S_{3,q}$. Si conclude che:

I) F contiene $q^2 + q + 1$ punti di $S_{3,q}$.

Ogni piano, distinto da ω_j, ω_4 , per la retta $O_j O_{j''}$ (j, j', j'' permutazione di $1, 2, 3$) interseca ulteriormente F in una conica non degenera passante per $O_{j'}$, $O_{j''}$.

Nel seguito si supporrà sempre, salvo esplicito avviso in contrario, $q > 3$. In tale ipotesi, si proverà che:

II) Se λ_l ($l = 1, 2, 3$) sono tre qualsiasi elementi distinti di $\sigma - 0$, esiste, per ogni $j = 1, 2, 3$, una (e, ovviamente, una sola) quadrica, Q , con-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 novembre 1965.

tenente le tre coniche sezioni parziali di F con i piani di equazioni $x_j = \lambda_l x_4$ ($l = 1, 2, 3$). Q è a punti parabolici, iperbolici, ellittici a secondo che

$$(1.1) \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 - 2(\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1)$$

sia nullo, quadrato non nullo in σ , non-quadrato in σ .

Poiché l'equazione di F non varia se si effettua una qualsiasi permutazione dei punti O_j ($j = 1, 2, 3$) del riferimento, è sufficiente fare la dimostrazione per un determinato valore di j . Si assumerà $j = 3$.

Si consideri la quadrica di equazione

$$(1.2) \quad \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 x_1 x_2 - x_3^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) x_3 x_4 - (\lambda_1 \lambda_2 + \lambda_2 \lambda_3 + \lambda_3 \lambda_1) x_4^2 = 0.$$

Per ogni $l = 1, 2, 3$, il piano $x_3 = \lambda_l x_4$ la interseca nella conica di equazioni $x_3 = \lambda_l x_4$, $\lambda_l x_1 x_2 = x_4^2$, la quale appartiene ad F ; quindi la quadrica (1.2) contiene le tre coniche sezioni parziali di F con i piani $x_3 = \lambda_l x_4$.

Indicata con Q detta quadrica, il piano ω_2 , tangente a Q in O_1 , la interseca secondo due rette coincidenti (appartenenti necessariamente ad $S_{3,q}$), distinte appartenenti ad $S_{3,q}$, coniugate in una estensione quadratica di σ , a seconda che (1.1) sia nullo, quadrato non nullo in σ , non-quadrato in σ e quindi corrispondentemente Q è di tipo parabolico, iperbolico, ellittico.

Risulterà utile nel seguito la seguente proposizione:

III) *Esiste un sottoinsieme γ di $\sigma - 0$, contenente almeno tre elementi, tale che siano soddisfatte le seguenti proprietà:*

(a) *per ogni terna $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ di elementi distinti di γ , l'espressione (1.1) è un non-quadrato in σ ;*

(b) *per ogni $\lambda_1 \in \sigma - \gamma - 0$, esistono due elementi distinti di γ , λ_2 e λ_3 , tali che la (1.1) sia un quadrato in σ .*

Poiché σ è finito, per provare l'asserto è sufficiente dimostrare che esistono tre elementi distinti di $\sigma - 0$, λ_l ($l = 1, 2, 3$), tali che (1.1) sia un non-quadrato in σ .

Si osservi che, se nella (1.1) si pone $\lambda_3 = -\lambda_2$, si ottiene

$$(1.3) \quad \lambda_1^2 + 4\lambda_2^2.$$

Si supponga inizialmente $q > 5$. Fissato un elemento $a \in \sigma$, non-quadrato in σ , si consideri, nel piano proiettivo $S_{2,q}$ sopra σ , la conica Γ di equazione

$$x_1^2 + 4x_2^2 = ax_3^2.$$

Essendo $q > 5$, esiste un punto P di $S_{2,q}$ appartenente a Γ , ma non alle rette $x_3 = 0$, $x_1 = \pm x_2$, e siano λ_1, λ_2 le sue prime due coordinate omogenee; allora λ_1 e λ_2 sono non nulli, poiché le rette $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$ sono esterne a Γ (essendo a un non-quadrato in σ), i tre elementi $\lambda_1, \pm \lambda_2$ sono distinti, poiché P non appartiene alle rette $x_1 = \pm x_2$, e l'espressione (1.3) è un non-quadrato in σ , in quanto P appartiene a Γ ma non alla retta $x_3 = 0$. Quindi λ_1, λ_2 e $\lambda_3 = -\lambda_2$ sono tre elementi distinti di $\sigma - 0$ tali che la (1.1) sia un non-quadrato in σ .

Se $q = 5$, in ogni terna di elementi distinti di $\sigma - o$, ve ne sono due opposti, d'altronde gli unici due valori che può assumere in σ l'espressione (I.3), con λ_1, λ_2 non nulli e $\lambda_1 \neq \pm \lambda_2$, sono ± 2 , entrambi non-quadrati in σ ; si conclude con l'asserto. Si è inoltre provato che:

IV) Se $q = 5$, per ogni terna $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ di elementi distinti di $\sigma - o$, l'espressione (I.1) è un non-quadrato in σ , cioè l'unico sottoinsieme di $\sigma - o$ verificante le proprietà espresse nella III) è $\sigma - o$ stesso.

Osservazione. — Se $p = 3$ ($q > 3$), la (I.3) risulta uguale a $\lambda_1^2 + \lambda_2^2$. Siano allora μ e ν due elementi distinti di $\sigma - o$, quadrati in σ ; comunque si considerino, tra le 4 radici quadrate di μ e ν , tre elementi (distinti), $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, la (I.1) assume il valore $\mu + \nu$. Poiché, come risulta dalla dimostrazione della III), in σ esistono sempre due quadrati distinti non nulli la cui somma è un non-quadrato, si può affermare che, se $p = 3$ ($q > 3$), esiste un sottoinsieme γ di $\sigma - o$, contenente almeno 4 elementi, tale che siano verificate le proprietà (a) e (b).

2. k -CALOTTE DI $S_{3,q}$ DEDUCIBILI DALLA SUPERFICIE F. — Si proverà la seguente proposizione:

V) Sia γ un sottoinsieme di $\sigma - o$ verificante le proprietà espresse nella III) e sia $m, 3 \leq m \leq q - 1$, il numero dei suoi elementi. Per ogni $j = 1, 2, 3$, i punti delle coniche sezioni parziali di F con i piani di equazioni $x_j = \lambda x_4, \lambda \in \gamma$, ed il punto O_j costituiscono una $(m(q - 1) + 3)$ -calotta, K, di $S_{3,q}$ non contenuta in un ovaloide. Per ogni punto di F non appartenente a K passa almeno una secante di K. Se $q \not\equiv 1 \pmod{3}$, aggregando a K il punto O_4 , si ottiene ancora una calotta.

Come si è già avuto occasione di osservare, è sufficiente considerare un determinato valore di j e sia $j = 3$.

Ogni piano di equazione $x_3 = \lambda x_4, \lambda \in \sigma - o$, sega F nella retta $O_1 O_2$ ed in una conica non degenera passante per O_1, O_2 ; si denotino con C_r ($r = 1, \dots, m$) e Γ_s ($s = 1, \dots, q - m - 1$) le coniche che si ottengono rispettivamente per $\lambda \in \gamma$ e $\lambda \in \sigma - \gamma - o$.

Dalla II proposizione, per le ipotesi fatte su γ , segue che:

(a') tre qualsiasi coniche C_r , distinte, appartengono ad una quadrica ellittica;

(b') per ogni conica Γ_s , esistono due coniche C_r , distinte, tali che la quadrica che contiene le tre coniche sia rigata (di tipo parabolico o iperbolico).

Dalla (a') si deduce che gli $m(q - 1) + 2$ punti delle coniche C_r ⁽¹⁾ costituiscono una calotta H. Poiché O_3 è doppio per F, aggregando ad H il punto O_3 , si ottiene ancora una calotta, K.

Per ogni punto P di F non appartenente a K passa una secante di K. Infatti, o P appartiene ad una delle rette $O_1 O_2, O_2 O_3, O_3 O_1$, secanti di K,

(1) Si ricordi (B. SEGRE [6], p. 4) che ogni conica non degenera di $S_{2,q}$ contiene $q + 1$ punti di $S_{2,q}$.

oppure ad una delle coniche Γ_s e, in tal caso, per la (b'), per P passa una secante di H e, quindi, di K.

La calotta K non è contenuta in un ovoide, cioè (B. Segre [6], p. 69, Teorema I) in una quadrica ellittica, poiché tre qualsiasi coniche C_r distinte appartengono ad un'unica quadrica (ellittica) non passante per O_3 (cfr. (1.2)). Si osservi che se $m \geq 4$ nemmeno H è contenuta in una quadrica ellittica, perché, in caso contrario, tale quadrica avrebbe in comune con F^m (≥ 4) coniche.

L'ultima parte della V) si deduce immediatamente dalla seguente proposizione:

VI) *Se $q \equiv 1 \pmod{3}$, ogni retta di $S_{3,q}$ per O_4 contiene uno ed un solo punto di $S_{3,q}$ appartenente ad F (in questa proposizione non si esclude che possa essere $q = 3$).*

Per la I), basta dimostrare che i punti di $S_{3,q}$ appartenenti ad F sono a due a due non allineati con O_4 . È immediato che le rette, che da O_4 proiettano i punti di F appartenenti al piano ω_4 , contengono un solo punto di F. Si considerino allora due punti qualsiasi di F, Y ($y_1, y_2, y_3, 1$) e Z ($z_1, z_2, z_3, 1$), non appartenenti ad ω_4 . Se Y e Z fossero allineati con O_4 , risulterebbe $y_j/z_j = \rho \neq 1$ ($j = 1, 2, 3$) e, essendo $y_1 y_2 y_3 = z_1 z_2 z_3 = 1$, ne seguirebbe $\rho^3 = 1$, il che è assurdo, poiché in σ ($q \equiv 1 \pmod{3}$) ogni elemento è il cubo di un solo elemento (B. Segre [8], p. 100, n. 79).

3. SULLA COMPLETEZZA DELLE PRECEDENTI k -CALOTTE DI $S_{3,q}$ PER I PRIMI VALORI DI q . - Si proverà che:

VII) *Se $q = 3$ o $q = 5$, i $(q-1)^2$ punti di F non appartenenti al piano ω_4 , i tre punti doppi di F ($O_j, j = 1, 2, 3$) ed il punto O_4 costituiscono una $((q-1)^2 + 4)$ -calotta completa di $S_{3,q}$ (2).*

Se $q = 3$, i 4 punti di F non appartenenti ad ω_4 si trovano su due coniche appartenenti a piani distinti e quindi sono a tre a tre non allineati; a questi si possono aggregare i tre punti doppi di F e, per la VI), il punto O_4 , ottenendosi in tal modo una 8-calotta di $S_{3,3}$.

Se $q = 5$, dalle proposizioni IV) e V) segue immediatamente che i punti menzionati nella VII) costituiscono una 20-calotta di $S_{3,5}$.

Indicata con L la predetta calotta di $S_{3,q}$ ($q = 3$ o $q = 5$), sia P (y_1, y_2, y_3, y_4) un punto di $S_{3,q}$ non appartenente ad L. Se $y_4 \neq 0$, una almeno delle coordinate y_j ($j = 1, 2, 3$) è non nulla e sia, ad esempio, $y_1 \neq 0$, allora P appartiene al piano $y_4 x_1 = y_1 x_4$, il quale sega L in una conica e contiene quindi una secante di L passante per P. Se $y_4 = 0$, o P appartiene ad una delle rette $O_1 O_2, O_2 O_3, O_3 O_1$, secanti di L, o P non appartiene a nessuna di dette rette, ma allora, per la VI), P appartiene ad una secante di L passante per O_4 .

Se $q = 7$, si può provare (la dimostrazione si omette per brevità) che ogni sottoinsieme γ di $\sigma - o$, verificante le proprietà espresse nella III), contiene esattamente tre elementi. In $S_{3,7}$, quindi, ogni calotta K contenuta in F,

(2) Per $q = 3$, si riottengono le 8-calotte complete di $S_{3,3}$ già determinate da B. SEGRE in [6], p. 71 ultima proposizione e p. 91 Teorema V.

ottenibile in corrispondenza di uno di detti sottoinsiemi (cfr. V prop.), è costituita da 20 punti appartenenti ad una quadrica ellittica e da un punto non appartenente ad essa e, pertanto, il problema della completezza di K rientra, come caso particolare, nel teorema V, a p. 73 di B. Segre [6].

Si proverà infine che:

VIII) *In $S_{3,9}$ esiste una 35-calotta contenuta in F , aggregando alla quale il punto O_4 , si ottiene una 36-calotta completa.*

Si supporrà in questa dimostrazione che σ abbia ordine 9. Allora, posto $f(t) = t^2 + 1$, i suoi elementi sono i polinomi in t , a coefficienti interi, ridotti rispettivamente mod $f(t)$ e mod 3.

In σ , i 4 quadrati non nulli sono $\pm 1, \pm t$. Si indichi con γ il sottoinsieme di $\sigma - 0$ costituito dagli elementi $\pm 1, \pm (t - 1)$, radici quadrate rispettivamente di 1 e di t . Dalla osservazione del n. 1 segue subito che γ verifica le proprietà (a) e (b).

Per ogni $\lambda \in \gamma$, sia C_λ la conica sezione parziale di F con il piano di equazione $x_3 = \lambda x_4$; per la V), i punti delle C_λ ed il punto O_3 costituiscono una 35-calotta, K , di $S_{3,9}$, contenuta in F ; poiché $9 \not\equiv 1 \pmod{3}$, aggregando a K il punto O_4 , si ottiene una 36-calotta, L . Si proverà che L è completa.

Indicata con Γ_μ , per ogni $\mu \in \sigma - \gamma - 0$, la conica sezione parziale di F con il piano $x_3 = \mu x_4$, per provare che L è completa è sufficiente dimostrare che ogni punto di $S_{3,9}$, non complanare con una C_λ né appartenente ad uno spigolo del tetraedro fondamentale, appartiene ad una quadrica rigata contenente due coniche C_λ ed una conica Γ_μ , oppure ad uno dei coni che da O_4 o da O_3 proiettano le C_λ .

Per ogni terna di coniche $C_{\lambda_1}, C_{\lambda_2}, \Gamma_\mu$, si indicherà con $Q_{(\lambda_1, \lambda_2, \mu)}$ la quadrica che le contiene. Si verifica, mediante la II), che le quadriche $Q_{(1, -1, \pm t)}, Q_{(t-1, -t+1, \pm(t+1))}$ sono di tipo parabolico e le quadriche $Q_{(\pm 1, \pm(t-1), \mp t)}, Q_{(\pm 1, \mp(t-1), \pm(t+1))}$ (si prendano contemporaneamente i segni superiori o quelli inferiori) di tipo iperbolico.

Infine si indichino con Q'_λ, Q''_λ i coni che, rispettivamente da O_3 e da O_4 , proiettano le C_λ .

Si verifica allora che, segnando con il piano ω_3 le quadriche $Q'_\lambda (\lambda \in \gamma), Q_{(1, -1, \pm t)}, Q_{(t-1, -t+1, \pm(t+1))}$, si ottengono le 8 coniche non degeneri appartenenti al fascio di coniche bitangenti in O_1 ed O_2 rispettivamente ad $O_1 O_4$ ed $O_2 O_4$.

Analogo risultato si ottiene segnando con il piano ω_4 le quadriche $Q''_\lambda (\lambda \in \gamma), Q_{(1, -1, \pm t)}, Q_{(t-1, -t+1, \pm(t+1))}$.

Infine, per ogni $\mu \in \sigma - \gamma - 0$, segnando con il piano $x_3 = \mu x_4$ le quadriche $Q'_\lambda, Q''_\lambda, Q_{(\pm 1, \pm(t-1), \mp t)}, Q_{(\pm 1, \mp(t-1), \pm(t+1))}$, si ottengono (come si verifica effettuando i calcoli) le 8 coniche non degeneri e la conica semplicemente degenera ⁽³⁾ appartenenti al fascio di coniche bitangenti in O_1 ed O_2 rispettivamente alle rette $x_3 = \mu x_4, x_2 = 0$ e $x_3 = \mu x_4, x_1 = 0$.

Resta così provato che la calotta L è completa.

(3) Ovviamente, essendo 12 le quadriche considerate, qualche conica sezione appartiene a più di una quadrica.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. BARLOTTI, *Un'estensione del teorema di Segre-Kustaanheimo*, « Boll. U.M.I. » (3) 10, 498–506 (1955).
- [2] G. PANELLA, *Caratterizzazione delle quadriche di uno spazio (tridimensionale) lineare sopra un corpo finito*, « Boll. U.M.I. » (3) 10, 507–513 (1955).
- [3] B. SEGRE, *Sulle ovali nei piani lineari finiti*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8) 17, 141–142 (1954).
- [4] B. SEGRE, *Ovals in a finite projective plane*, « Canad. J. Math. », 7, 414–416 (1955).
- [5] B. SEGRE, *Intorno alla geometria sopra un campo di caratteristica due*, « Rev. Fac. Sci. Istanbul », ser. A, 21, 97–123 (1956).
- [6] B. SEGRE, *Le geometrie di Galois*, « Ann. di Mat. » (4) 48, 1–96 (1959).
- [7] B. SEGRE, *On complete caps and ovaloids in three-dimensional Galois spaces of characteristic two*, « Acta Arithmetica », 5, 315–332 (1959).
- [8] B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*, « Monogr. Mat. C.N.R. », vol. 7 (Roma, Cremonese, 1961).
- [9] G. TALLINI, *Sulle k -calotte di uno spazio lineare finito*, « Ann. di Mat. » (4) 42, 119–164 (1956).
- [10] G. TALLINI, *Sulle k -calotte degli spazi lineari finiti*, « Rend. Acc. Naz. Lincei » (8) 20 311–317 e 442–446 (1956).
- [11] G. TALLINI, *On caps of kind s in a Galois r -dimensional space*, « Acta Arithmetica », 7, 19–28 (1961).
- [12] G. TALLINI, *Calotte complete di $S_{4,q}$ contenenti due quadriche ellittiche quali sezioni iperpiane*, « Rend. di Mat. », 23, 108–123 (1964).

SUMMARY. — By using suitable cubic surfaces, certain k -caps of a three-dimensional Galois space (not contained in an ovaloid) are constructed, and the existence of complete $20_{3,5}$ and $36_{3,9}$ is proved.