Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Albino Canfora

Sul teorema del massimo modulo per sistemi fortemente ellittici

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **39** (1965), n.6, p. 428–430.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1965_8_39_6_428_0>

Analisi matematica. — *Sul teorema del massimo modulo per sistemi fortemente ellittici* (*). Nota di ALBINO CANFORA, presentata (**) dal Corrisp. C. MIRANDA.

1. C. Miranda (1), tempo addietro, ha stabilito il teorema del massimo modulo per il problema di Dirichlet per operatori ellittici di ordine 2m, nel caso di 2 variabili. Successivamente S. Agmon ha suggerito il modo di generalizzare e di estendere al caso di n variabili, il risultato stabilito da Miranda. Ciò è reso possibile, fondamentalmente, dalla costruzione della soluzione del problema di Dirichlet per il semispazio (2), e da un teorema di regolarizzazione dovuto allo stesso Agmon (3).

Recentemente Agmon Douglis e Niremberg hanno stabilito (4) le formule risolutive del problema di Dirichlet per il semispazio, per i sistemi ellittici.

Ciò mi ha permesso, seguendo l'ordine di idee di Miranda e di Agmon, di estendere il teorema del massimo modulo al caso dei sistemi fortemente ellittici, in n variabili.

Desidero avvertire che la dimostrazione completa dei risultati enunciati nella presente Nota, si trova riportata in una Memoria di prossima pubblicazione (5).

2. Ricordiamo brevemente alcune notazioni e definizioni introdotte nella Memoria citata in (3).

Siano $\{s_1, \cdots, s_N\}$ e $\{t_1, \cdots, t_N\}$ due N-ple di interi, e consideriamo il sistema:

$$\sum_{j=1}^{N} l_{ij}(P\,;\partial)\, u_j(P) = F_i(P) \qquad i = 1, \cdots, N$$

in cui si suppone che ogni operatore l_{ij} abbia ordine $\leq s_i + t_j$.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca n. 13 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1965–66.

(**) Nella seduta dell'11 dicembre 1965.

(1) C. MIRANDA, *Teorema del massimo modulo e teorema di esistenza e di unicità per il problema di Dirichlet relativo alle equazioni ellittiche in due variabili* «Annali di Matematica pura e applicata» (IV), vol. XLVI, 265–312 (1958).

(2) S. AGMON–A. DOUGLIS–L. NIREMBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*. I, «Comm. Pure Appl. Math.» *12*, 623–727 (1959).

(3) S. AGMON, *The* L_p *approach to the Dirichlet problem*, «Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa», (III) vol. XIII, 405–448 (1959).

(4) S. AGMON–A. DOUGLIS–L. NIREMBERG, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*. II, «Comm. Pure Appl. Math.», XVII, 35–92 (1964).

(5) A. CANFORA, *Il teorema del massimo modulo per il problema di Dirichlet relativo ai sistemi fortemente ellittici*, in corso di stampa su: «Ricerche di Matematica».

Se l'_{ij} è la parte di l_{ij} contenente le derivate di ordine uguale ad $s_i + t_j$, il sistema considerato si dirà ellittico qualora risulti:

$$\mathrm{L}(\mathrm{P}\,;\Xi) = \mathrm{Det.}\,(l'_{ij}(\mathrm{P}\,;\Xi)) \neq 0$$

per ogni vettore Ξ reale diverso da zero.

Invece il sistema:

$$\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} l_{ij}\left(\mathrm{P}\,;\frac{1}{i}\partial\right)u_j(\mathrm{P}) = \mathrm{F}_i(\mathrm{P}) \qquad i = 1, \cdots, \mathrm{N}$$

si dirà fortemente ellittico secondo Niremberg, se risulta $t_i = s_i \geq 0$ per ogni i, e se inoltre:

$$\mathrm{Re}\sum_{kj=1}^{\mathrm{N}} l'_{kj}(\mathrm{P}\,;\Xi)\,\eta_k\bar{\eta}_j \geq a\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} |\Xi|^{2t_j}\,|\eta_j|^2$$

per ogni vettore reale Ξ, e per ogni vettore complesso $(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_\mathrm{N})$.

Porremo per il seguito:

$$\rho = \max t_j \quad ; \quad \mu = \min t_j .$$

3. Vale il seguente teorema di massimo modulo:

Sia G *un dominio limitato di classe* $\mathrm{C}^{2\varrho+1}$, *ed* $(l_{ij}(\mathrm{P}\,;\partial))_{i,j}$ *un sistema fortemente ellittico di operatori a coefficienti* $a_{\alpha ij}$ *di classe* $\mathrm{C}^{|\alpha|}(\overline{\mathrm{G}})$.

Siano φ_{jb} $(j = 1, \cdots, \mathrm{N}\,;\, b = 0, \cdots, t_j - 1)$ *m funzioni definite su* $\dot{\mathrm{G}}$ *tali che* $\varphi_{jb} \in \mathrm{C}^{t_j-1-b}(\dot{\mathrm{G}})$, *ed* $u_1, \cdots, u_\mathrm{N}$ N *funzioni tali che sia* $u_j \in \mathrm{C}^{\varrho+t_j}(\mathring{\mathrm{G}}) \cap \mathrm{C}^{t_j-1}(\overline{\mathrm{G}})$, *e tali da risolvere il problema di Dirichlet*:

$$\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} l_{ij}(\mathrm{P}\,;\partial)\,u_j(\mathrm{P}) = 0 \qquad i = 1, \cdots, \mathrm{N} \quad \text{in } \mathring{\mathrm{G}}$$

$$\left(\frac{d}{dn}\right)^b u_j(\mathrm{P})\Big|_{\dot{\mathrm{G}}} = \varphi_{jb} .$$

Si ha allora:

$$\sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \sum_{|\alpha| \leq t_j - 1} \max_{\overline{\mathrm{G}}} |\partial^\alpha u_j| \leq \mathrm{K}\left(\Phi + \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \|u_i\|_{\mathrm{L}_2(\mathrm{G})}\right)^{(6)},$$

essendo K *una costante che dipende solo da* G *e dai coefficienti del sistema.*

Lo schema generale della dimostrazione è lo stesso di quello seguito da Miranda: si costruiscono delle funzioni ausiliarie z_j che assumono sul contorno i dati del problema, e le si sottrae dalle u_j; per le differenze $v_j = u_j - z_j$ si ottengono delle maggiorazioni che, combinate con quelle valide per le z_j, permettono di scrivere le diseguaglianze volute.

(6) Si è posto: $\Phi = \sum_{j,b} \sum_{|\beta| \leq t_j - 1 - b} \max |\partial^\beta \varphi_{jb}|$.

Il punto centrale della dimostrazione consiste nel conseguire le maggiorazioni per le v_j.

Per il che ci si avvale di un lemma che, sebbene in ipotesi più restrittive, estende, al caso dei sistemi fortemente ellittici, un risultato di Agmon [(3)].

LEMMA. – *Siano* $u_1, \cdots, u_N$ N *funzioni verificanti le seguenti condizioni:*

$$u_j \in C^{\varrho+t_j}(\mathring{G}) \cap C^{t_j-1}(\overline{G}) \quad ; \quad \partial^\alpha u_j \in L_p(G) \quad \text{per } |\alpha| = t_j$$

$$\left(\frac{d}{dn}\right)^b u_j \Big|_{\dot{G}} = 0\,; \qquad b = 0, \cdots, t_j - 1.$$

Supponiamo che, per ogni N*-pla* $(w_1, \cdots, w_N)$ *di funzioni verificanti le condizioni:*

$$w_j \in C^{\varrho+t_j}(\overline{G}) \quad ; \quad \left(\frac{d}{dn}\right)^b w_j \Big|_{\dot{G}} = 0\,; \qquad b = 0, \cdots, t_j - 1,$$

valgano le disuguaglianze:

$$\left| \sum_{j=1}^{N} (u_j, l_{ij} w_i)_G \right| \leq C \, \| w_i \|_{t_i+\mu-\nu, L_{p'}(G)} \qquad i = 1, \cdots, N$$

essendo ν *un intero non negativo e* $\leq \mu$.

Esiste allora un $c_0 > 0$ *indipendente da* C *e dalle* u_j, *tale che risulti:*

$$\| u_j \|_{t_j-\mu+\nu, L_p(G)} \leq c_0 \left(C + \sum_{i=1}^{N} \| u_i \|_{L_p(G)} \right)$$

con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Il lemma segue immediatamente da lemmi di contenuto analogo per la sfera e la semisfera.

Per stabilire tale lemma è stato necessario, tra l'altro, far vedere che la « complementing condition » risulta soddisfatta, per i sistemi fortemente ellittici, anche da condizioni al contorno più generali di quelle di Dirichlet, e, precisamente, per il seguente problema al contorno:

$$\sum_{j=1}^{N} l_{ij} u_j = 0 \quad \text{in } G \quad ; \quad \left(\frac{d}{du}\right)^{b+q} u_j \Big|_{\dot{G}} = \varphi_{jb}\,; \qquad j = 1, \cdots, N\,; b = 0, \cdots, t_j - 1$$

essendo q un intero non negativo qualunque.

SUMMARY. — In the present paper a maximum modulus theorem for strongly elliptic systems is described. It extends prèvions results obtained by C. Miranda and Agmon.