Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francis Bueckenhout

Ovales et ovales projectifs

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.1, p. 46–49.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_1_46_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica) SIMAI & UMI

http://www.bdim.eu/

Geometria — *Ovales et ovales projectifs*. Nota di FRANCIS BUEKENHOUT, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Introdotta una nozione (astratta) generalizzata di *ovale*, se ne studiano le proprietà più importanti dai punti di vista gruppale ed immersivo.

1. INTRODUCTION. - Le but de cette note est de présenter quelques définitions et résultats relatifs aux ovales et aux ovales projectifs. On trouvera un traitement détaillé de ces questions avec les démonstrations des résultats et une bibliographie plus complète en [1].

2. OVALES. - Nous appelons *ovale* tout ensemble (de points) muni d'une famille de permutations appelées *involutions* soumise aux conditions suivantes: (i) toute involution est involutive (c'est à dire d'ordre deux); (ii) pour tout couple de points (a_1, a_2) et pour tout couple de points (b_1, b_2) avec $a_i \neq b_j$ $(i, j = 1, 2)$ il existe une et une seule involution I telle que $I(a_1) = a_2$ et $I(b_1) = b_2$; (iii) il existe au moins trois points. Le concept d'ovale généralise celui d'ovale projectif qui a été considéré par différents auteurs sous des noms différents (cfr. [2], [3], [4], [5]).

3. OVALES PROJECTIFS. - Nous appelons *ovale projectif* $\mathcal{O}$ toute partie non vide d'un plan projectif $\mathcal{P}$ telle que (i) toute droite de $\mathcal{P}$ coupe $\mathcal{O}$ en deux points au plus; (ii) par tout point de $\mathcal{O}$ passe une et une seule droite tangente à $\mathcal{O}$ (c'est à dire ayant un seul point commun avec $\mathcal{O}$). Tout ovale projectif possède une structure naturelle d'ovale, pour laquelle les points de $\mathcal{P}-\mathcal{O}$ peuvent être identifiés à des involutions.

4. CONIQUES PROJECTIVES (1) ET CONIQUES. - Nous appelons *conique projective* toute courbe irréductible d'ordre deux d'un plan de Pappus possédant des points dans ce plan. Une conique projective est un cas particulier d'ovale projectif. Nous dirons qu'une *conique* est un ovale isomorphe à la structure naturelle d'ovale d'une conique projective.

5. PROPRIÉTÉS DES OVALES FINIS. - Soit $\mathcal{O}$ un ovale fini d'*ordre* n (possédant $n+1$ points). Alors (i) $\mathcal{O}$ possède n^2 involutions; (ii) n est impair si et seulement si toute involution possède deux ou zéro points fixes; (iii) n est pair si et seulement si la permutation identique est une involution.

Ces propriétés ne s'étendent pas aux ovales infinis quelconques.

(*) Nella seduta dell'8 gennaio 1966.

(1) Cette expression n'est pas utilisée dans [1].

6. PLONGEMENT CANONIQUE D'UN OVALE DANS UNE STRUCTURE D'INCIDENCE. – Etant donné un ovale $\mathcal{O}$ on détermine une structure d'incidence $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ de la manière suivante: les points de $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ sont les points de $\mathcal{O}$ et les involutions de $\mathcal{O}$; une droite de $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ est formée de deux points $a, b \in \mathcal{O}$ (pas nécessairement distincts) et de toutes les involutions qui permutent a, b (si $a \neq b$ la droite est *sécante*; si $a = b$ la droite est *tangente*). Dans $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ deux droites se coupent en un et un seul point mais en général $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ n'est pas un plan projectif.

7. SOUS-OVALES. – Un sous-ensemble $\mathcal{S}$ d'un ovale $\mathcal{O}$ est un sous-ovale si $\mathcal{S}$ est conservé par toute involution de $\mathcal{O}$ permutant (a_1, a_2) et (b_1, b_2) avec $a_i \neq b_j$ et $a_i, b_j \in \mathcal{S}$.

8. PROJECTIVITÉS ET CERCLES D'UN OVALE. – Une projectivité d'un ovale $\mathcal{O}$ est une permutation des points de $\mathcal{O}$ qui est un produit d'un nombre fini d'involutions. Les projectivités de $\mathcal{O}$ forment un groupe G triplement transitif sur les points de $\mathcal{O}$. Un cercle est l'ensemble des points fixes d'un groupe de stabilité G_{abc} où a, b, c sont des points distincts de $\mathcal{O}$.

Un ovale $\mathcal{O}$ est une conique si et seulement si $\mathcal{O}$ ne possède qu'un seul cercle. Si $\mathcal{O}$ est un ovale fini, trois points distincts de $\mathcal{O}$ appartiennent à un et un seul cercle, chaque cercle $\mathcal{C}$ possède une structure d'ovale induite par la structure de $\mathcal{O}$ et muni de cette structure $\mathcal{C}$ est une conique.

9. AUTOMORPHISMES INVOLUTIFS. – Un automorphisme d'un ovale est une permutation des points qui respecte les involutions. Un automorphisme involutif (d'ordre deux) possédant deux ou un points fixes est une involution. Un automorphisme involutif sans points fixes n'est pas nécessairement une involution. Soit σ un automorphisme involutif d'un ovale fini $\mathcal{O}$ d'ordre n et supposons que l'ensemble $\mathcal{I}$ des points fixes de σ contienne au moins trois points; alors $\mathcal{I}$ est un sous-ovale de $\mathcal{O}$ d'ordre $\sqrt{n}$, toute involution de $\mathcal{O}$ conservant $\mathcal{I}$ possède au moins un point fixe dans $\mathcal{O}$ et la restriction de $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ à $\mathcal{S}(\mathcal{I})$ munit $\mathcal{S}(\mathcal{I})$ d'une structure de plan projectif.

10. UNE CLASSIFICATION DES OVALES. – Etant donné un ovale $\mathcal{O}$, une droite de $\mathcal{S}(\mathcal{O})$ est *régulière* si toute involution appartenant à cette droite est un automorphisme de $\mathcal{O}$. Les droites régulières d'un ovale forment un des ensembles suivants:

I) l'ensemble vide;
II) une sécante;
III) une tangente;
IV) toutes les tangentes;
V) toutes les tangentes et toutes les sécantes.

Des exemples permettent de montrer que ces cinq classes d'ovales sont non vides.

11. OVALES RÉGULIERS. – Tout ovale de la classe V obtenue ci–dessus sera dit régulier. Les seuls ovales réguliers connus sont les coniques. Si $\mathcal{O}$ est un ovale régulier tout cercle de $\mathcal{O}$ est un sous–ovale régulier isomorphe à une conique, trois points distincts appartiennent à un et un seul cercle et une seule des conditions suivantes est remplie: *a*) toute involution possède zéro ou deux points fixes; *b*) la permutation identique est une involution. Si $\mathcal{O}$ est un ovale régulier pour lequel la permutation identique est une involution, les involutions ayant un point fixe donné forment un groupe abélien.

12. UN THÉORÈME CONCERNANT LES GROUPES DOUBLEMENT TRANSITIFS FINIS. – Soit G un groupe de permutations fini doublement transitif sur les points d'un ensemble E et supposons que le groupe de stabilité d'un point $a \in \mathrm{E}$, soit G_a, contienne un élément central involutif I. Appelons symétrie, tout élément conjugué à I dans G. Alors (i) le produit de trois symétries est une symétrie; (ii) le sous–groupe invariant H engendré par les symétries contient un sous–groupe T d'indice deux dans H, invariant dans G, abélien élémentaire et simplement transitif. Ce résultat fournit des renseignements sur les ovales réguliers finis.

13. OVALES RÉGULIERS FINIS. – Soit $\mathcal{O}$ un ovale régulier fini et G le groupe des projectivités de $\mathcal{O}$. Alors les conditions suivantes sont équivalentes: (i) $\mathcal{O}$ est une conique; (ii) le groupe de stabilité de deux points est résoluble; (iii) tout élément involutif de G est une involution. L'ordre d'un ovale régulier fini est toujours un nombre de la forme p^n (p premier, n entier naturel). Si $p = 2$, un tel ovale est toujours une conique. Nous dirons qu'un ovale régulier fini $\mathcal{O}$ est *minimal* s'il n'est pas une conique et si tout sous–ovale de $\mathcal{O}$ est une conique. Tout ovale régulier fini qui n'est pas une conique contient au moins un sous–ovale minimal.

Si $\mathcal{O}$ est un ovale minimal et G le groupe des projectivité de $\mathcal{O}$, ce dernier est d'ordre p^{2k} ($p \neq 2$) et $k \geq 3$; $\mathcal{O}$ contient des sous–ovales d'ordre p^k; les éléments d'ordre impair d'un groupe de stabilité G_{abc} forment un sous–groupe invariant de G_{abc} et les 2–sous–groupes de Sylow de G_{abc} sont cycliques (d'ordre au moins égal à deux); les involutions de $\mathcal{O}$ possédant deux points fixes engendrent un groupe simple H, d'indice deux dans G, pour lequel les triples de points se répartissent en deux classes de transitivité.

14. SYSTÈMES DE COORDONNÉES. – Soit $\mathcal{O}$ un ovale, $0, 1, \infty$ trois points distincts de $\mathcal{O}$, I_0 l'involution de points fixes 0 et ∞, J_1 l'involution permutant $0, \infty$ et fixant 1, I_a l'involution fixant ∞ et permutant $0, a$ et J_a l'involution qui permute $0, \infty$ et $1, a$. Désignons par T_a la projectivité $\mathrm{I}_a \mathrm{I}_0$ et par H_a la projectivité $\mathrm{J}_a \mathrm{J}_1$. Posons $\mathrm{T}_a(x) = x + a$ pour tout $a, x \in \mathcal{O} - \infty$ et $\mathrm{H}_a(x) = ax$ pour tout $a, x \in \mathcal{O} - \infty - 0$ en convenant en outre que $0x = x0 = 0$. Enfin désignons par Q l'ensemble $\mathcal{O} - \infty$ muni des opérations d'addition et de multiplication définies ci–dessus. *Si $\mathcal{O}$ est un ovale régulier,*

Q possède notamment les propriétés suivantes:

Q est un loop de neutre 0 pour l'addition;

Q — 0 est un loop de neutre 1 pour la multiplication;

$a(b + c) = ab + ac$ pour tout a, b, c dans Q;

tout a appartenant à Q possède un inverse unique $-a$ pour l'addition et un inverse unique a^{-1} pour la multiplication (si $a \neq 0$);

$(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$;

$a^{-1}(ab) = b$;

$b(a(bc)) = (b(ab))c$ pour tout a, b, c.

Lorsque $\mathcal{O}$ est régulier et fini, Q est un groupe abélien pour l'addition et Q est donc un quasi-corps (à gauche) dans ce cas.

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ovale régulier $\mathcal{O}$ soit une conique est que Q soit un champ. L'existence d'ovales réguliers finis qui ne sont pas des coniques est donc liée à l'existence de quasi-corps finis possédant les propriétés $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, $a^{-1}(ab) = b$, $b(a(bc)) = (b(ab))c$ sans être des champs.

Si Q est un quasi-corps possédant les propriétés ci-dessus et si $\mathcal{S}$ est le plan de translation à coordonnées dans Q, les points (a, a^{-1}) $a \in Q$ et les points (0) et (∞) forment un ovale projectif de la classe II (de la classe V si Q est un champ).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] BUEKENHOUT F., *Etude intrinsèque des ovales*, « Rend. Mat. », 5, 25 (1966).

[2] OSTROM T. G., *Ovals, dualities and Desargues's theorem*, « Canad. Jour. Math. », 7, 417–431 (1955).

[3] QVIST B., *Some remarks concerning curves of the second degree in a finite plane*, « Ann. Acad. Sci. Fenn. », *134* (1952).

[4] SEGRE B., *Lectures on Modern Geometry*, Ed. Cremonese, Roma 1961.

[5] TITS J., *Ovoïdes à translations*, « Rend. Mat. », *21*, 37–59 (1962).