Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Aldo Belleni-Morante

Diffusione di neutroni in un mezzo costituito da due regioni debolmente accoppiate

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.1, p. 80–86.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_1_80_0>

Fisica matematica. — *Diffusione di neutroni in un mezzo costituito da due regioni debolmente accoppiate* (*). Nota di ALDO BELLENI-MORANTE, presentata (**) dal Socio B. FINZI.

SUMMARY. — The neutron diffusion equations in a reactor composed of two loosely coupled cores were derived directly from the transport equation.

The various approximate hypotheses, which were found necessary, were discussed from a mathematical and physical point of view.

1. INTRODUZIONE. - In un recente lavoro [1], G. C. Baldwin ha studiato il fenomeno della diffusione dei neutroni in un reattore del tipo « Argonaut » [2], [3], [4]. L'Argonaut, nella versione più comune, è costituito da due mezzi moltiplicanti (mezzo « 1 » e mezzo « 2 »), contenenti cioè atomi fissionabili e quindi capaci di moltiplicare per reazioni di fissione gli eventuali neutroni presenti nelle due regioni.

Ciascuno dei due mezzi è separatamente sottocritico, tale dunque da rendere impossibile il sostentamento di una reazione a catena. La criticità dell'Argonaut è ottenuta mediante un accoppiamento « debole » fra i due mezzi ove con la locuzione « accoppiamento debole » si vuole sottolineare il fatto che solo una piccola percentuale dei neutroni, che hanno subìto il loro ultimo urto in uno dei mezzi, penetra nell'altro.

Lo studio del Baldwin si fonda su una modifica della comune equazione della diffusione dei neutroni [5], consistente nell'introdurre nell'equazione della diffusione dei neutroni nel mezzo « 1 » un termine che rappresenta globalmente il contributo dei neutroni provenienti dal mezzo « 2 ».

Nella presente Nota ci proponiamo di mostrare come le equazioni usate in [1] sono una conseguenza dell'equazione di Boltzmann o del trasporto [6], come del resto logicamente deve essere, dato che l'equazione di Boltzmann fornisce una descrizione completa del fenomeno della diffusione neutronica nei mezzi materiali.

Nella dimostrazione di quanto sopra annunciato ci serviremo soltanto delle ipotesi correntemente usate per ricavare la comune equazione della diffusione dei neutroni a partire dall'equazione del trasporto, oltre che, naturalmente, dell'ipotesi dell'accoppiamento debole tra il mezzo « 1 » ed il mezzo « 2 ». Viene così a trovare logica deduzione il termine che, nella trattazione del Baldwin, appare come una correzione introdotta intuitivamente.

2. L'EQUAZIONE DEL TRASPORTO. - Consideriamo un mezzo moltiplicante costituito da due parti omogenee C_1 e C_2, limitate rispettivamente dalle

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo n. 6 di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta dell'8 gennaio 1966.

superfici regolari e non rientranti [6], S_1 ed S_2 e, per semplicità, supponiamo che C_1 e C_2 siano circondati da un mezzo avente sezioni d'urto nulle (per es. il vuoto). Ammettiamo inoltre che sia possibile rappresentare la distribuzione delle velocità dei neutroni, presenti in C_1 ed in C_2, mediante un'opportuna velocità media v (teoria ad un gruppo [6]) e che lo « scattering » sia isotropo nel sistema L. Quanto segue, però, può essere generalizzato, facendo uso di un formalismo più complicato, al caso in cui C_1 e C_2 siano circondati da un mezzo moderatore (per es. grafite), lo scattering non sia isotropo e sia necessaria una teoria a più gruppi.

Indichiamo dunque con $N_1(P, \underline{\Omega}, t)$ la densità di quei neutroni, che, all'istante t, si trovano in $P \in C_1$, che hanno velocità $v\underline{\Omega}$ e che hanno subito l'ultimo urto in un punto interno a C_1 (neutroni « nati » in C_1, o neutroni « 1 »); sia poi $N_2(P, \underline{\Omega}, t)$ la densità dei neutroni nati in C_2 (neutroni « 2 ») in $P \in C_1$. La densità totale, in ogni punto $P \in C_1$, è ovviamente la somma delle due densità sopra definite.

La densità neutronica $N_1(P, \underline{\Omega}, t)$ soddisfa l'equazione:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v\Sigma_1 + v\underline{\Omega}\cdot\underline{\nabla}\right] N_1(P, \underline{\Omega}, t) = \frac{v}{4\pi} f_1 \int_{\omega'} [N_1(P, \underline{\Omega}', t) + N_2(P, \underline{\Omega}', t)]\, d\omega', \tag{1}$$

$$P \in C_1, \quad t > 0,$$

ove:

Σ_1 è la sezione macroscopica d'urto totale nel mezzo C_1; $\underline{\nabla} \equiv \text{grad}$; $\underline{\Omega} = \underline{\Omega}(\theta, \psi) = \text{sen}\,\theta \cos\psi \underline{i} + \text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\psi \underline{j} + \cos\theta \underline{k}$, $(0 \le \psi \le 2\pi, 0 \le \theta \le \pi)$ è il versore della velocità dei neutroni, $\underline{i}$, $\underline{j}$ e $\underline{k}$ essendo i versori degli assi di un'opportuna terna cartesiana ortogonale di riferimento; $d\omega' = \text{sen}\,\theta'\, d\theta'\, d\psi'$; f_1 è una costante che caratterizza il fenomeno dello scattering e della moltiplicazione per fissione dei neutroni in C_1.

Notiamo che la (1) differisce dalla classica equazione di Boltzmann [6], per il termine $\frac{v}{4\pi} f_1 \int_{\omega'} N_2(P, \underline{\Omega}', t)\, d\omega'$, che rappresenta il contributo al bilancio dei neutroni « 1 » nell'intorno del punto $P \in C_1$ da parte dei neutroni « 2 », che ivi subiscono il loro primo urto in C_1, divenendo così neutroni « 1 ».

Il problema della soluzione dell'equazione (1) è completamente determinato (supposta nota $N_2(P, \underline{\Omega}, t)$) se assegnamo la condizione:

$$N_1(P, \underline{\Omega}, t) = M_1(P, \underline{\Omega}, t) \qquad P \in C_1, \; t \le 0, \tag{2}$$

che, sebbene impropriamente, chiameremo condizione iniziale, e la condizione al contorno:

$$N_1(P, \underline{\Omega}, t) = 0 \quad , \quad P \in S_1 \quad , \quad t > 0, \qquad \underline{\Omega}\cdot\underline{u}_1 \le 0, \tag{3}$$

ove $\underline{u}_1$ è il versore della normale esterna di S_1 ed $M_1(P, \underline{\Omega}, t)$ è una funzione nota di P, $\underline{\Omega}$, e t.

Notiamo che la condizione (3) traduce il fatto fisico che soltanto neutroni « 2 » possono penetrare in C_1, attraverso S_1.

L'equazione del trasporto e le condizioni iniziale ed al contorno relative al mezzo « 2 » si ottengono ovviamente scambiando fra loro gli indici 1 e 2 nelle (1), (2) e (3).

L'equazione (1), con le condizioni (2) e (3), e la corrispondente equazione, con le condizioni iniziale ed al contorno, relativa al mezzo C_2, possono essere poste nella forma integrale seguente, [7] (Fig. 1):

$$(4)\qquad N_i(P,\underline{\Omega},t)=\frac{f_i}{4\pi}\int_0^{R_i(P,\underline{\Omega})} dR\left\{\exp(-\Sigma_i R)\int_{\omega''}[N_1(P-R\underline{\Omega},\underline{\Omega}'',t-R/v)+\right.$$

$$\left.+N_2(P-R\underline{\Omega},\underline{\Omega}'',t-R/v)]\,d\omega''\right\},\qquad P\in C_i\,,\ i=1,2\,.$$

La (4) costituisce la formulazione matematica del fenomeno della diffusione dei neutroni da un punto di vista sostanziale, mentre la (1) si fonda su uno studio dello stesso fenomeno da un punto di vista locale.

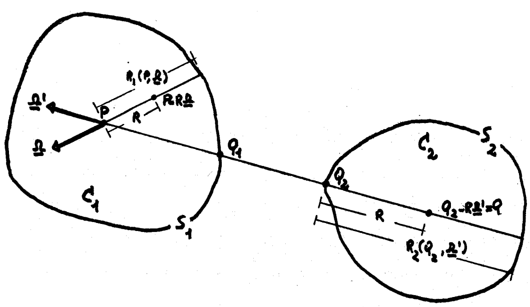

Fig. 1.

Ci proponiamo ora di esprimere la densità neutronica $N_2(P,\underline{\Omega}',t)$, che compare al secondo membro della (1), per mezzo di una equazione integrale che involga la « presenza » del mezzo C_2. Si ha (fig. 1):

$$N_2(P,\underline{\Omega}',t)=\exp(-\Sigma_1\overline{PQ_1})\,N_2(Q_2\,,\underline{\Omega}',t-\overline{PQ_2}/v)\,,$$

ove $Q_1=P-R_1(P,\underline{\Omega}')\,\underline{\Omega}'$, $Q_2=P-\overline{PQ_2}\,\underline{\Omega}'$.

La relazione precedente risulta chiara se si tiene presente la definizione di neutroni di tipo « 2 » ed il fatto che $\exp(-\Sigma_1\overline{PQ_1})$ è la probabilità che un neutrone percorra il tratto PQ_1 di C_1 senza subire urti [8]. Ciò premesso, è facile vedere come i neutroni « 2 », che sono in $P\in C_1$ all'istante t e che hanno velocità $v\underline{\Omega}'$, sono tutti e soli quelli che erano in $Q_2\in C_2$ all'istante $t-\overline{PQ_2}/v$ e che non hanno subito urti nell'attraversare il tratto PQ_1 di C_1.

Facendo uso dell'equazione integrale (4) (in cui si immagini di aver posto $i=2$, $P=Q_2$ e di aver considerato l'istante $t'=t-\overline{PQ_2}/v$ invece dell'istante t), si ottiene:

$$N_2(P, \underline{\Omega}', t) = \frac{f_2}{4\pi} \exp(-\Sigma_1 \overline{PQ_1}) \int_0^{R_2(Q_2, \underline{\Omega}')} dR \left\{ \exp(-\Sigma_2 R) \times \right.$$

$$\left. \times \int_{\omega''} \left[N_1\left(Q_2 - R\underline{\Omega}', \underline{\Omega}'', t - \frac{R+\overline{PQ_2}}{v}\right) + N_2\left(Q_2 - R\underline{\Omega}', \underline{\Omega}'', t - \frac{R+\overline{PQ_2}}{v}\right)\right] d\omega'' \right\},$$

ed anche:

$$(5) \qquad \int_{\omega'} N_2(P, \underline{\Omega}', t)\, d\omega' = \frac{f_2}{4\pi} \int_{\omega'} d\omega' \int_0^{R_2(Q_2, \underline{\Omega}')} dR \left\{ \exp(-\Sigma_1 \overline{PQ_1}) \exp(-\Sigma_2 R) \times \right.$$

$$\left. \times \int_{\omega''} \left[N_1\left(Q_2 - R\underline{\Omega}', \underline{\Omega}'', t - \frac{R+\overline{PQ_2}}{v}\right) + N_2\left(Q_2 - R\underline{\Omega}', \underline{\Omega}'', t - \frac{R+\overline{PQ_2}}{v}\right)\right] d\omega'' \right\}.$$

Ponendo poi:

$$Q = Q_2 - R\underline{\Omega}' = P - \overline{PQ}\,\underline{\Omega}' \quad , \quad \mu_{21}(P, Q) = \frac{f_2}{4\pi} \exp(-\Sigma_1 \overline{PQ_1}) \exp(-\Sigma_2 \overline{Q_2 Q}) / \overline{PQ}^2,$$

e tenendo presente che, per il volume elementare dV_Q intorno al punto $Q \in C_2$, si ha $dV_Q = \overline{PQ}^2\, dR\, d\omega'$, dalla (5) si ricava:

$$(6) \qquad \int_{\omega'} N_2(P, \underline{\Omega}', t)\, d\omega' =$$

$$= \int_{C_2} dV_Q \left\{ \mu_{21}(P, Q) \int_{\omega''} [N_1(Q, \underline{\Omega}'', t - \overline{PQ}/v) + N_2(Q, \underline{\Omega}'', t - \overline{PQ}/v)]\, d\omega'' \right\}.$$

Dalla (6) e dalla (1) segue infine:

$$(7) \qquad \left[\frac{\partial}{\partial t} + v\Sigma_1 + v\underline{\Omega} \cdot \underline{\nabla}\right] N_1(P, \underline{\Omega}, t) = \frac{v}{4\pi} f_1 \int_{\omega'} N_1(P, \underline{\Omega}', t)\, d\omega' +$$

$$+ \frac{v}{4\pi} f_1 \int_{C_2} dV_Q \left\{ \mu_{21}(P, Q) \int_{\omega''} [N_1(Q, \underline{\Omega}'', t - \overline{PQ}/v) + N_2(Q, \underline{\Omega}'', t - \overline{PQ}/v)]\, d\omega'' \right\},$$

$$P \in C_1, \; t > 0.$$

3. L'IPOTESI DELL'ACCOPPIAMENTO DEBOLE. – Diciamo, per definizione, che i mezzi C_1 e C_2 sono debolmente accoppiati quando sono verificate le diseguaglianze seguenti:

$$(8) \qquad \sup[\overline{PP^0}] \ll \inf[\overline{PQ}] \quad , \quad \sup[\overline{QQ^0}] \ll \inf[\overline{PQ}],$$

ove P e P^0 sono due punti qualunque di C_1 e Q e Q^0 due punti di C_2.

Le diseguaglianze (8) hanno due importanti conseguenze fisiche, che permettono di scrivere la (7) in forma notevolmente più semplice. Infatti, se valgono le (8):

a) soltanto una piccola percentuale dei neutroni « 1 », che escono da C_1, subisce un urto entro C_2 e diviene del tipo « 2 ». Dunque $N_1(P, \underline{\Omega}, t) \ll N_2(P, \underline{\Omega}, t)$ per $P \in C_2$ e, analogamente, $N_2(P, \underline{\Omega}, t) \ll N_1(P, \underline{\Omega}, t)$ per $P \in C_1$;

b) il tempo di ritardo $\overline{PQ}/v$, che compare al secondo membro della (7), può ritenersi indipendente da $P \in C_1$ e da $Q \in C_2$. Si può porre cioè: $\overline{PQ}/v = \tau = $ costante.

Tenendo presenti le osservazioni *a*) e *b*), la (7) può essere posta nella forma semplificata seguente:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v\Sigma_1 + v\underline{\Omega}\cdot\underline{\nabla}\right] N_1(P, \underline{\Omega}, t) = \frac{v}{4\pi} f_1 \int_{\omega'} N_1(P, \underline{\Omega}', t)\, d\omega' + \tag{9}$$
$$+ \frac{v}{4\pi} f_1 \int_{C_2} dV_Q \left\{ \mu_{21}(P, Q) \int_{\omega''} N_2(Q, \underline{\Omega}'', t - \tau)\, d\omega'' \right\}.$$

Ci proponiamo ora di trasformare l'integrale di volume, che compare al secondo membro della (9), per mettere in evidenza che esso rappresenta il contributo globale dei neutroni, provenienti direttamente da C_2, al bilancio dei neutroni « 1 » in C_1. Definiamo all'uopo una funzione di accoppiamento $\bar{\mu}_{21} = \bar{\mu}_{21}(P, t)$ mediante la relazione:

$$\bar{\mu}_{21}(P, t) = \int_{C_2} dV_Q \left\{ \mu_{21}(P, Q) \int_{\omega''} N_2(Q, \underline{\Omega}'', t)\, d\omega'' \right\} \Big/ \int_{C_2} dV_Q \int_{\omega''} N_2(Q, \underline{\Omega}'', t)\, d\omega'' ; \tag{10}$$

dalla (9) si ottiene allora:

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + v\Sigma_1 + v\underline{\Omega}\cdot\underline{\nabla}\right] N_1(P, \underline{\Omega}, t) = \frac{v}{4\pi} f_1 \left\{ \int_{\omega'} N_1(P, \underline{\Omega}', t)\, d\omega' + \right. \tag{11}$$
$$\left. + \bar{\mu}_{21}(P, t - \tau) \int_{C_2} dV_Q \left[\int_{\omega''} N_2(Q, \underline{\Omega}'', t - \tau)\, d\omega'' \right] \right\}, \qquad P \in C_1,\ t > 0.$$

Avvertiamo che la funzione $\bar{\mu}_{12}(P, t)$ può essere determinata sperimentalmente [3], [4] e che la sua dipendenza dal tempo può essere a volte imposta a priori, [2]. Si conclude dunque che la $\bar{\mu}_{21}(P, t)$, anche se definita per mezzo della funzione incognita $N_2(Q, \underline{\Omega}'', t)$, è da ritenersi funzione nota di P e di t.

Ciò premesso, si vede che l'ultimo addendo al secondo membro della (11) risulta proporzionale all'integrale $\int_{C_2} dV_Q \left[\int_{\omega''} N_2(Q, \underline{\Omega}'', t - \tau)\, d\omega'' \right]$ e che quindi, dipendendo dalla densità dei neutroni « 2 » in ogni punto di C_2, rappresenta proprio il contributo « globale » dei neutroni « 2 » al bilancio neutronico dei neutroni « 1 » in C_1.

È infine quasi superfluo accennare al fatto che, per ogni $P \in C_2$, si può scrivere un'equazione, ottenibile immediatamente dalla (11), scambiando tra loro gli indici 1 e 2.

4. L'APPROSSIMAZIONE DELLA DIFFUSIONE. – Posto:

$$\Phi_i(P, t) = v \int_{\omega} N_i(P, \underline{\Omega}, t) \, d\omega, \qquad i = 1, 2,$$

dalla (11), moltiplicando ambo i membri per sen $\theta \, d\theta \, d\psi$ ed integrando rispetto a ψ tra 0 e 2π e rispetto a θ tra 0 e π, si ottiene:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_1(P, t) + \Sigma_1 \Phi_1(P, t) + v \int_{\omega} \underline{\Omega} \cdot \underline{\nabla} N_1(P, \underline{\Omega}, t) \, d\omega = \tag{12}$$

$$= f_1 \Phi_1(P, t) + f_1 \bar{\mu}_{21}(P, t - \tau) \int_{C_2} \Phi_2(Q, t - \tau) \, dV_Q.$$

L'ultimo addendo al primo membro della precedente può essere utilmente trasformato, facendo uso della legge di Fick [5]:

$$\int_{\omega} \underline{\Omega} N_1(P, \underline{\Omega}, t) \, d\omega = - D_1 \underline{\nabla} \int_{\omega} N_1(P, \underline{\Omega}, t) \, d\omega, \tag{13}$$

D_1 essendo il coefficiente di diffusione del mezzo «1».

Si ha infatti:

$$v \int_{\omega} \underline{\Omega} \cdot \underline{\nabla} N_1(P, \underline{\Omega}, t) \, d\omega = v \underline{\nabla} \cdot \int_{\omega} \underline{\Omega} N_1(P, \underline{\Omega}, t) \, d\omega =$$

$$= - D_1 \underline{\nabla}^2 v \int_{\omega} N_1(P, \underline{\Omega}, t) \, d\omega = - D_1 \underline{\nabla}^2 \Phi_1(P, t).$$

Dalla (12) segue allora:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_1(P, t) = D_1 \underline{\nabla}^2 \Phi_1(P, t) + (f_1 - \Sigma_1) \Phi_1(P, t) +$$

$$+ f_1 \bar{\mu}_{21}(P, t - \tau) \int_{C_2} \Phi_2(Q, t - \tau) \, dV_Q.$$

La precedente è l'equazione della diffusione dei neutroni « 1 » nel mezzo C_1 e l'ultimo addendo al secondo membro è proprio il termine correttivo, introdotto dal Baldwin in [1] con un procedimento di carattere intuitivo.

5. CONCLUSIONI. – Come si è sopra dimostrato, l'equazione della diffusione modificata, di cui fa uso il Baldwin in [1], può essere ottenuta direttamente dall'equazione di Boltzmann nelle ipotesi che C_1 e C_2 siano debol-

mente accoppiati e che sia valida la legge di Fick (13). D'altra parte, la comune equazione della diffusione dei neutroni può essere ricavata da quella di Boltzmann, facendo unicamente l'ipotesi (13), valida, come è noto [8], sotto opportune condizioni.

Dunque l'equazione usata dal Baldwin non è una modifica – di chiaro significato fisico ma soggettiva – della equazione della diffusione dei neutroni. L'equazione del Baldwin è semplicemente una forma diversa dell'equazione della diffusione dei neutroni, ottenibile da quella di Boltzmann nell'ipotesi della validità della legge di Fick.

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. C. BALDWIN, «Nucl. Sci. Engng.», *6*, 320 (1959).
[2] R. A. DANOFSKY and R. E. UHRIG, «Nucl. Sci. Engng.», *16*, 131 (1963).
[3] D. H. LENNOX and C. N. KELBER, *Summary Report on the Hazards of the Argonaut Reactor*, Report ANL–5647 (1956).
[4] R. L. SEALE, *Los Alamos Document*, LAMS–2968 (1964).
[5] S. GLASSTONE and M. C. EDLUND, *Nuclear Reactor Theory*, Princeton, Van Nostrand Company (1958).
[6] B. DAVISON, *Neutron Transport Theory*, Oxford, Clarendon Press (1958).
[7] J. SALMON, *Théorie cinétique des neutrons rapides*, Paris, Presses Universitaires de France (1961).
[8] A. M. WEINBERG and E. P. WIGNER, *The Physical Theory of Neutron Chain Reactors* Chicago, Chicago Press (1958).