Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Pier Vittorio Ceccherini

Alcune osservazioni sulla teoria delle reti

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.2, p. 218–221.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_2_218_0>

Matematica. — *Alcune osservazioni sulla teoria delle reti* (*). Nota di PIER VITTORIO CECCHERINI, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — After some reminders on net theory (no. 1, 2), a simple necessary arithmetical condition is given for a net to be derivable from a group, and further necessary conditions for the existence of a non trivial net are derived from a recent result by C. Pedrini. Some consequences are then deduced.

1. La nozione di rete consente fra l'altro di studiare gli insiemi di sostituzioni su n lettere, anche nell'ipotesi che queste non formino un gruppo. Essa è stata introdotta da B. Segre [4], (pp. 46–260), a cui si debbono approfondimenti molteplici sull'argomento, inquadrati in una teoria generale delle strutture finite. Incominciamo con alcuni richiami riguardo a quella, rinviando all'opera citata per ulteriori informazioni.

Un «piano cartesiano finito d'ordine n» è – per definizione – un insieme, $P = X \times Y$, prodotto cartesiano di due insiemi X ed Y dotati di un medesimo numero finito n di elementi. Una coppia (x, y) con $x \in X$, $y \in Y$ viene brevemente chiamata un «punto» di P.

Due punti (x, y), (x', y') di P vengono detti *indipendenti* se $x \neq x'$ e $y \neq y'$; *dipendenti* nel caso contrario ($x = x'$ e/o $y = y'$). Più punti di P diconsi (fra loro) *indipendenti*, se tali sono due qualunque purché distinti di essi. Un sottoinsieme f di P, che sia costituito da n punti indipendenti, chiamasi un *blocco* di P. È chiaro che, se f è un blocco di P, la terna (f, X, Y) definisce una a p p l i c a z i o n e biunivoca $f : X \to Y$ (una s o s t i t u z i o n e su X se $Y = X$); e viceversa. Due punti (x, y) e (x', y') di P diconsi fra loro simmetrici rispetto ad un blocco f se $y' = f(x)$ e $x' = f^{-1}(y)$.

Una *rete* (in senso stretto) $K_{t,n}$ di P è, per definizione, un insieme di blocchi di P, tale che t punti indipendenti qualsiansi di P appartengano ad uno e un sol blocco di $K_{t,n}$.

Si dice che una rete $K_{t,n}$ di P è *derivabile da un gruppo*, se esiste un blocco f di P tale che l'insieme $f^{-1} K_{t,n}$ di sostituzioni su X risulti un gruppo (la scrittura $f^{-1} K_{t,n}$ denota l'insieme delle sostituzioni $f^{-1}g$ con $g \in K_{t,n}$, il prodotto $f^{-1}g$ essendo inteso in senso operatorio).

Se $A_i = (x_i, y_i)$ con $i = 1, 2, \cdots, s$ sono $s < t$ punti indipendenti, arbitrariamente fissati nel piano cartesiano P d'ordine n, l'insieme $\overline{P}$, ottenuto da P sopprimendone tutti i punti (x, y) dipendenti con almeno un punto A_i, è un piano cartesiano finito d'ordine $n - s$. Allora ogni blocco di P contenente quegli s punti interseca $\overline{P}$ secondo un blocco di $\overline{P}$. Si dimostra agevolmente

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R., per l'anno 1965–66 (Gruppo n. 17).

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1966.

(cfr. B. Segre [4], p. 79) che la totalità delle sezioni con $\overline{\mathrm{P}}$ dei blocchi di $\mathrm{K}_{t,n}$ passanti per tutti i punti $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_s$ è una rete $\mathrm{K}_{t-s,n-s}$ di $\overline{\mathrm{P}}$, la quale viene detta la rete dedotta da $\mathrm{K}_{t,n}$ per *imposizione* dei punti $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \cdots, \mathrm{A}_s$.

Ricordiamo infine (cfr. ad esempio B. Segre [4], p. 305) che un *sistema di Steiner* $\mathcal{S}(k, h, p)$ è un sistema di h-ple non ordinate di elementi distinti di un dato insieme S di p elementi, tale che k elementi qualsiansi (purché distinti) di S appartengano ad una e una sola h-pla di $\mathcal{S}$.

2. Allo scopo di stabilire alcune proprietà complementari delle reti, è opportuno richiamare taluni risultati, per la cui dimostrazione si può consultare la bibliografia indicata.

I. – *Se* G *è un gruppo strettamente* 2*-transitivo di sostituzioni su di un insieme di* q *oggetti, allora* q è *necessariamente una potenza di un numero primo* (cfr. R. D. Carmichael [1], p. 145, teor. V).

II. – *Sia* $\mathrm{K}_{4,n}$ *una rete di un piano* P *d'ordine* $n \geq 7$, *e siano* f *un blocco di* $\mathrm{K}_{4,n}$ *e* A, A' *una coppia di punti distinti simmetrici rispetto ad* f. *Nessuno dei blocchi di* $\mathrm{K}_{4,n}$ *passanti per* A *e per* A' *ha esattamente* 2 *punti in comune con* f (cfr. C. Pedrini [2]).

III. – *Condizione necessaria per l'esistenza di un sistema di Steiner* $\mathcal{S}(2, 3, m)$ *è che risulti* $m \equiv 1$ *(mod.* 6) *ovvero* $m \equiv 3$ *(mod.* 6) (cfr. J. Steiner [5], od anche B. Segre [4], pp. 305-306).

Si dimostra (cfr. M. Reiss [3]) che la condizione espressa dalla III è anche sufficiente per l'esistenza di un $\mathcal{S}(2, 3, m)$, ma ciò non interviene nelle deduzioni successive.

Basandosi sulla II, lo stesso Pedrini è riuscito ad associare ad ogni $\mathrm{K}_{4,n}$ un sistema di Steiner $\mathcal{S}(2, 3, n-2)$ e quindi ad ogni $\mathrm{K}_{t,n}$ un sistema di Steiner $\mathcal{S}(2, 3, n-t+2)$. Da ciò e dalla III si ha subito che:

IV. – *Condizione necessaria per l'esistenza di una* $\mathrm{K}_{t,n}$ *con* $4 \leq t \leq n-3$ *è che sia* $n - t \equiv \pm 1$ *(mod.* 6).

La seguente nota proposizione V si ottiene infine come caso particolare dalla (11_r) di B. Segre [4], p. 268, ivi stabilita nel corso di uno studio di sistemi d'incidenza (complessi a due indici) più generali dei sistemi di Steiner.

V. – *Condizione necessaria affinché esista un sistema di Steiner* $\mathcal{S}(k, h, p)$, *è che tutti i numeri*

$$(p-r)\cdots(p-k+1)/[(h-r)\cdots(h-k+1)]$$

risultino interi, per ogni $r = 0, 1, \cdots, k-1$.

Osserviamo esplicitamente che la proposizione V generalizza la III, perché, ponendo nella V $k = 2$, $h = 3$, $p = m$, la condizione che i corrispondenti numeri indicati in V risultino interi equivale, come subito si verifica, alla condizione espressa dalla III.

3. Da quanto sopra si deducono facilmente, come vedremo, le seguenti cinque proposizioni VI-X.

VI. – *Condizione necessaria affinché una* $K_{t,n}$ *con* $t \geq 2$ *sia derivabile da un gruppo è che n risulti della forma*

$$n = p^h + t - 2 \qquad (\text{con } p \text{ primo e } h \geq 1).$$

In particolare, per $t = 3$ e con la terminologia di B. Segre [4], p. 141, si ha che: *condizione necessaria affinché una* $K_{3,n}$ *sia derivabile da un gruppo è che* $K_{3,n}$ *sia* *pseudoimmergibile* *(ossia isomorfa a una* $K'_{3,n}$ *tracciata su una quadrica rigata di uno spazio lineare* $S_{3,q}$).

Da qui segue anche evidentemente che, *qualora si riuscisse ad associare ad una retta v di un piano grafico (proiettivo) d'ordine n un gruppo strettamente 3-transitivo di sostituzioni su v, ne verrebbe che l'ordine n del piano dovrebbe necessariamente essere la potenza di un numero primo.*

Dimostrazione. – Se $K_{t,n}$ è derivabile da un gruppo G, allora G è strettamente t-transitivo su n oggetti: $G = G_{t,n}$. Ma allora, le sostituzioni di G che lasciano fissi $t - 2$ oggetti fissati costituiscono un gruppo G' che è strettamente 2-transitivo su $n - t + 2$ oggetti. Pertanto, in virtù della I, il numero $n - t + 2$ è la potenza p^h $(h \geq 1)$ di un primo, onde l'asserto.

La seguente proposizione (la cui validità era stata posta come problema dal Pedrini) generalizza la II. La relativa dimostrazione, estremamente semplice, mostra l'importanza che l'operazione di imposizione di dati punti ha in questioni di questo tipo: il che già era stato rilevato da B. Segre in vari punti dell'opera citata.

VII. – *Sia* $K_{t,n}$ *una rete di un piano* P *d'ordine* $n \geq t - 3$ *(si escludono cioè i casi* $n = t$, $n = t - 1$, $n = t - 2$, *i quali risultano* *banali*, *nel senso precisato in B. Segre* [4], *pp.* 218–219). *Sia poi f un blocco di* $K_{t,n}$ *e sia* A, A$'$ *una coppia di punti distinti di* P *simmetrici rispetto ad f (cfr. n.* 1). *Allora, nessuno dei blocchi di* $K_{t,n}$ *passanti per* A *e per* A$'$ *ha esattamente* $t - 2$ *punti in comune con f.*

Dimostrazione. – Per $t = 4$ l'asserto è espresso dalla II. Nel caso $t \geq 5$, si supponga per assurdo che esista un blocco g di $K_{t,n}$ passante per A e per A$'$ e secante f esattamente in $t - 2$ punti distinti $B_1, B_2, \cdots, B_{t-2}$.

Sia $K_{4,n-t+4}$ la rete ottenuta imponendo a $K_{t,n}$ i punti $B_1, B_2, \cdots, B_{t-4}$, e siano $\bar{f}$ e $\bar{g}$ le tracce rispettivamente di f e di g sul piano di $K_{4,n-t+4}$. Allora $\bar{g}$ è un blocco di $K_{4,n-t+4}$, avente in comune col blocco $\bar{f}$ di $K_{4,n-t+4}$ soltanto i due punti B_{t-3}, B_{t-4}, e passante per i punti A, A$'$, i quali risultano simmetrici rispetto ad $\bar{f}$. Ma ciò è in contrasto con la proposizione II, dato che l'ipotesi attuale $n \geq t + 3$ implica $n - t + 4 \geq 7$, onde l'asserto.

VIII. – *Ad ogni* $K_{t,n}$ *non banale* $(n \geq t - 3)$ *può venir associato un sistema di Steiner* $\mathcal{S}(t - 2, t - 1, n - 2)$.

Dimostrazione. – Sia f un blocco di $K_{t,n}$ e sia A, A$'$ una coppia di punti distinti di P simmetrici rispetto ad f. Denotiamo con S l'insieme degli $n - 2$ punti di f indipendenti da A, e cioè da A$'$ (cfr. n. 1). Presi $t - 2$ punti distinti qualsiansi di S, per essi, per A e per A$'$ passa uno ed un sol blocco della rete $K_{t,n}$, in quanto i t punti considerati risultano indipendenti. Tale blocco (non potendo per la VII avere soltanto $t-2$ punti in comune con f) seca f esattamente in un ulteriore $(t-1)$-mo punto; esso invero (contenendo A ed A′ che non stanno su f) risulta distinto da f, mentre poi due blocchi distinti di $K_{t,n}$ non possono avere t punti distinti a comune, in virtù della definizione di rete $K_{t,n}$.

Sia $\mathcal{S}$ la totalità delle $(t-1)$-ple non ordinate di punti distinti di S segabili su f mediante blocchi di $K_{t,n}$ passanti per A, A′, e cioè ottenibili completando nel modo indicato le varie $(t-2)$-ple non ordinate di punti distinti di S. Si perviene così ad un sistema $\mathcal{S}(t-2, t-1, n-2)$, in quanto – come s'è visto – $t-2$ punti distinti di S appartengono ad esattamente una $(t-1)$-pla di $\mathcal{S}$.

IX. – *Condizione necessaria per l'esistenza di una $K_{t,n}$ non banale $(n \geq t-3)$ è che i numeri*

$$(n-r-2)\cdots(n-t+1)/[(t-r-1)\cdots 2]$$

risultino interi, per $r = 0, 1, \cdots, t-3$.

Dimostrazione. – Se esiste una $K_{t,n}$ non banale, allora esiste (per la VIII) un sistema di Steiner $\mathcal{S}(t-2, t-1, n-2)$; pertanto, in forza della V (nella quale si ponga $t-2, t-1, n-2$ ordinatamente in luogo di k, h, p), ciascuno dei numeri indicati in IX risulta un intero.

In virtù dell'osservazione posta alla fine del n. 2, si ha senz'altro che la condizione (di esistenza per una $K_{t,n}$) espressa dalla IV non aggiunge niente di nuovo a quella espressa dalla IX. Mostriamo invece che:

X. – *Il criterio di esistenza per una $K_{t,n}$ espresso dalla* IX *è più forte di quello espresso dalla* IV.

Dimostrazione. – Infatti, ad esempio, la non esistenza di alcuna $K_{14,27}$ si deduce dal criterio IX, essendo

$$(27-2)\cdots(27-14+1)/(13\cdot 12\cdots 2) = 25\cdot 23\cdot 19\cdot 17\cdot 7\cdot 4/13 \neq \text{intero},$$

ma non dal criterio IV, in quanto

$$27-14 = 13 \equiv +1 \qquad (\text{mod. } 6).$$

BIBLIOGRAFIA.

[1] CARMICHAEL R. D., *Introduction to the theory of groups of finite order*. New edition. – New York, Dover Publication, 1956 (Unabridged and unaltered republication of the first edition [Copyright 1937]).

[2] PEDRINI C., *Gruppi transitivi di sostituzioni e t-reti*, in «Rend. Accad. Naz. Lincei», ser. 8ª, *40*, 226 (1966).

[3] REISS M., *Über eine Steinersche combinatorische Aufgabe*, in «J. reine angew. Math.», *56*, 324–344 (1859).

[4] SEGRE B., *Istituzioni di geometria superiore*. [Anno accad. 1963–64]. Lezioni raccolte da P. V. Ceccherini. Vol. III. – Roma, Istituto Matematico «G. Castelnuovo», 1965.

[5] STEINER J., *Combinatorische Aufgabe*, in «J. reine angew. Math.», *45*, 181–182 (1853).