Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Petre Teodorescu

Sur un certain caractère tensoriel des charges concentrées

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.2, p. 251–257.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_2_251_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Meccanica. — *Sur un certain caractère tensoriel des charges concentrées.* Nota di PETRE TEODORESCU, presentata (*) dal Corrisp. D. GRAFFI.

RIASSUNTO. — Partendo dalla nozione di forza concentrata, si indica un metodo unitario per costruire i carichi concentrati; in questa occasione si mette in evidenza un certo carattere tensoriale di questi carichi e si fa una loro classificazione. Si fanno inoltre, alcune applicazioni.

1. INTRODUCTION. – Une catégorie importante de charges qui peuvent actionner en mécanique des solides déformables est formée par les charges concentrées. Jusqu'à présent on a étudié surtout l'effet des forces concentrées et des moments concentrés, charges qu'on rencontre fréquemment. D'autres charges concentrées ont été assez peu étudiées, quoiqu'elles peuvent être rencontrées dans différents problèmes posés par la technique moderne ou par le développement de la théorie des dislocations (cfr. [3]).

Mentionnons qu'on ne connaît pas encore une définition tout à fait satisfaisante de la force concentrée agissant dans un point intérieur ou sur le contour d'un corps solide déformable. D'ailleurs on peut faire une liaison étroite avec la question de l'unicité de la solution du problème ou avec la possibilité d'appliquer le principe de B. de Saint Venant.

On peut définir le plus correctement une *force concentrée* agissant à l'intérieur d'un milieu solide déformable infini (espace infini), par exemple, comme étant la charge concentrée qui correspond à un certain état de tension et à un certain état de déformation, ayant une certaine singularité dans le pôle (point d'application de la charge concentrée); l'état de tension et l'état de déformation correspondants seraient ainsi ceux qu'on considère d'habitude (le problème classique) (cfr. [6]). C'est vrai qu'une telle définition n'a pas un pregnant caractère mécanique; mais, d'après notre connaissance, on ne saurait donner une définition meilleure. En effet, en superposant – par exemple – un état de tension uniforme (on aura donc la même singularité), on peut obtenir un autre état de tension et un autre état de déformation, ayant la même charge concentrée résultante. Une définition analogue peut être donnée pour toute autre charge concentrée, par exemple pour le moment concentré.

Dans ce qui va suivre nous allons supposer que la notion de force concentrée est connue et nous allons indiquer une méthode unitaire de construction des charges concentrées; à cette occasion on va mettre en évidence un certain caractère tensoriel de ces charges et on va pouvoir en faire une classification. Quelques applications s'ensuivent.

(*) Nella seduta del 12 febbraio 1966.

2. Effet local des charges concentrées. – Considérons d'abord le passage d'un point A, de vecteur de position $\vec{\rho}$, qui fait l'angle α avec l'axe Ox^1, à un point voisin O.

Par exemple, par la réduction de la force $\vec{F}$ dans le point O l'on obtient une force $\vec{F}$ appliquée en O et inclinée avec l'angle β par rapport à l'axe Ox^1. De même, on obtient un *moment dirigé* d'après la direction normale à $\vec{\rho}$, ayant l'intensité $F\rho \sin(\beta - \alpha)$; ce moment sera considéré positif s'il correspond à une rotation positive dans son plan $Ox^1 x^2$ (qui superpose la direction positive de l'axe Ox^1 sur la direction positive de l'axe Ox^2 par une rotation d'angle droit). On obtient encore un système de forces colinéaires de torseur nul (résultante force nulle et moment résultant nul), d'intensité $F\rho \cos(\beta - \alpha)$, que nous allons dénommer *dipôle des forces* ou *centre de dilatation dirigée*; il va être considéré positif si les forces concentrées qui le composent produisent un éloignement de leurs points d'application et négatif dans le cas contraire.

Il est intéressant de remarquer qu'en utilisant ces charges concentrées on peut obtenir d'autres systèmes de charges concentrées plus complexes.

Par exemple, par la superposition des effects de deux moments dirigés sur deux directions orthogonales, ayant des intensités égales, on obtient justement le *moment concentré* intérieur classique, qui a perdu son effect directionnel, l'état de tension étant à *antisymétrie axiale*; c'est d'ailleurs la propriété essentielle de ce moment.

De même, l'on peut introduire dans le plan un *quadripôle*, obtenu par la superposition des effets de deux dipôles orthogonaux d'intensités égales; on constate que ce quadripôle perd son effet directionnel. On obtient ainsi un *centre de dilatation* (ou *contraction*) plane pour lequel l'état de tension est à *symétrie axiale*. D'une manière analogue, par la superposition des effets de trois dipôles orthogonaux d'intensités égales, l'on obtient un *centre de dilatation spatiale* (*sphérique*).

Ces résultats ont été déjà signalés dans quelques traités classiques (par exemple [4]), mais comme une constatation et sans une justification approfondie, que nous allons tâcher de donner au point suivant.

On peut généraliser les résultats ci-dessus à un système de forces concentrées, actionnant à l'intérieur d'un sousdomaine D′, petit par rapport au domaine D considéré; on obtient des résultantes dans différents points du sousdomaine et on réduit ensuite les effets à un seule point intérieur.

Soit encore un moment concentré M, agissant dans le point A; par la réduction de ce moment dans le point O on obtient un moment concentré dans le point O et un *dipôle des moments concentrés*, d'intensité $M\rho$. Le signe peut être considéré comme positif ou négatif par comparaison à un tel dipôle dont le signe est donné arbitrairement.

D'une manière analogue, on peut considérer un centre de dilatation D agissant dans le point A; par la réduction de ce centre de dilatation dans le point O on obtient un centre de dilatation dans ce dernier point et un *dipôle* *des centres de dilatation*, d'intensité $D\rho$. Quant au signe de ce dipôle, on peut procéder comme ci-dessus.

En partant des dipôles des moments concentrés et des dipôles des centres de dilatation, ou bien des moments dirigés et des dipôles des forces concentrées et en utilisant ce procédé de passage à un point voisin, on peut obtenir aussi d'autres charges concentrées d'ordre supérieur.

3. CHARGES CONCENTRÉES DE DIFFÉRENTS ORDRES. CARACTÈRE TENSORIEL DES CHARGES CONCENTRÉES. – Dans le cas de l'espace élastique ou bien du plan élastique l'état de tension et l'état de déformation ne présentent pas des particularités en fonction de la direction d'action d'une charge concentrée intérieure (force concentrée, moment dirigé ou bien un dipôle quelconque). C'est dans le cas d'un domaine qui a au moins une partie de la frontière à distance finie qu'apparaîssent des directions privilégiées, fonction de cette frontière.

Soit les forces concentrées f_{xi} ($i = 1, 2, 3$), ayant l'intensité égale à l'unité et actionnant en (x_0^i) d'après les axes Ox^i; on observe aisément qu'elles sont les composantes d'un vecteur (tenseur du premier ordre). Si l'on note avec $f(f_{xi})$ une composante du vecteur déplacement, du tenseur déformation ou du tenseur tension dans le point (x^i), due à l'action de la force f_{xi}, on observe que $f(f_{xi})$ sont aussi les composantes d'un vecteur, en admettant la superposition des effets.

Les charges concentrées qui se comportent comme un tenseur du premier ordre en ce qui concerne l'état de tension et l'état de déformation qu'elles provoquent seront appelées des *charges du premier ordre*. Les forces concentrées sont des charges du premier ordre. On observe que les dipôles des centres de dilatation et les dipôles des moments concentrés sont aussi des charges du premier ordre.

Soit maintenant les moments dirigés M_{ij} d'après la direction de l'axe Ox^i et dans un plan parallèle au plan $Ox^i x^j$; leur intensité est obtenu par le passage à la limite

$$M_{ij} = \lim_{\substack{F_i \to \infty \\ c_j \to 0}} F_i c_j, \tag{1}$$

où F_i est l'intensité des forces qui forment le moment et c_j est la distance entre leurs points d'application. D'une manière analogue on obtient un dipôle des forces D_{kk} d'après la direction de l'axe Ox^k, l'intensité étant précisée par

$$D_{kk} = \lim_{\substack{F_k \to \infty \\ c_k \to 0}} F_k c_k. \tag{2}$$

Tenant compte des conventions de signes adoptées auparavant et du fait que F_i et c_j sont les composantes de deux vecteurs, on obtient le tenseur du second ordre

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{ccc} D_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & D_{22} & -M_{23} \\ -M_{31} & M_{32} & D_{33} \end{array}\right\}.$$

Soit m_{ij} et d_{kk} des moments dirigés, respectivements des dipôles de forces ayant l'inténsité égale à l'unité et appliqués dans le point (x_0^l); si l'on introduit la notation

$$(3')\qquad p_{ij} = \begin{cases} -m_{ij} & (i \neq j\,;\, i = 1\,,\, j = 2\,;\, i = 2\,,\, j = 3\,;\, i = 3\,,\, j = 1)\,, \\ m_{ij} & (i \neq j\,;\, i = 2\,,\, j = 1\,;\, i = 3\,,\, j = 2\,;\, i = 1\,,\, j = 3)\,, \\ d_{kk} & (i = j = k\,;\, k = 1\,,\, 2\,,\, 3)\,, \end{cases}$$

on peut écrire dans le système de coordonnées $Ox'^1 x'^2 x'^3$ les relations

$$(3'')\qquad p'_{kl} = p_{ij}\,\alpha_{ki}\,\alpha_{lj}\,,$$

où α_{ij} est le cosinus de l'angle formé par les directions Ox'^i et Ox^j.

En notant avec $f(m_{ij})$ et $f(d_{kk})$ les grandeurs géométriques et mécaniques induites dans le point (x^l) par une seule charge concentrée et en admettant la superposition des effets, on peut écrire

$$(4)\qquad f(p'_{kl}) = f(p_{ij})\,\alpha_{ki}\,\alpha_{lj}\,.$$

On obtient ainsi un tenseur du second ordre de la forme

$$(4')\qquad T_f \equiv \left\{\begin{array}{ccc} f(d_{11}) & -f(m_{12}) & f(m_{13}) \\ f(m_{21}) & f(d_{22}) & -f(m_{23}) \\ -f(m_{31}) & f(m_{32}) & f(d_{33}) \end{array}\right\},$$

où la fonction f représente un déplacement u_l ou une tension σ_{lm} ou bien une déformation ε_{lm} ou toute autre grandeur (rotation ω_{lm} etc.). C'est ainsi qu'on peut écrire, par exemple, la relation

$$(4'')\qquad u_l(d_\Delta) = u_l(d_{11})\,\alpha_1^2 + u_l(d_{22})\,\alpha_2^2 + u_l(d_{33})\,\alpha_3^2 +$$
$$+ [u_l(m_{21}) - u_l(m_{12})]\,\alpha_1\alpha_2 + [u_l(m_{32}) - u_l(m_{23})]\,\alpha_2\alpha_3 + [u_l(m_{13}) - u_l(m_{31})]\,\alpha_3\alpha_1\,,$$

où les α_i $(i = 1\,,\,2\,,\,3)$ sont les cosinus directeurs d'une direction quelconque par rapport aux axes de coordonnées Ox^i.

Les charges concentrées qui se comportent comme un tenseur du second ordre en ce qui concerne l'état de tension et l'état de déformation qu'elles provoquent seront appelées des *charges du second ordre*. Les moments dirigés et les dipôles des forces sont des charges du second ordre.

Quelques idées dans cette direction peuvent etre trouvées dans [3].

La partie antisymétrique de ce tenseur nous conduit à un vecteur ayant les composantes

$$(5)\qquad f(m_k) = \frac{1}{2}\,[f(m_{ij}) + f(m_{ji})]\,,$$

d'après l'axe $Ox^k (i \neq j \neq k \neq i)$; on obtient ainsi le *moment concentré* qui a des propriétés d'antisymétrie axiale. Les moments concentrés sont des charges du premier ordre.

Le premier invariant de ce tenseur, qui est un scalaire, nous conduit à un *centre de dilatation spatiale* ayant l'intensité

$$f(d) = \frac{1}{3} [f(d_{11}) + f(d_{22}) + f(d_{33})] \tag{6}$$

et des propriétés de symétrie centrale. Les centres de dilatation sont des *charges d'ordre zéro*.

Le centre de dilatation met en évidence la *partie sphérique* du tenseur et correspond à un changement du volume du milieu solide déformable. Le *déviateur* de ce tenseur va nous conduire aux changements de la forme.

Dans le cas plan on a le tenseur (un seul indice est suffisant pour indiquer la direction de la charge concentrée)

$$\begin{Bmatrix} f(d_1) & -f(m_1) \\ f(m_2) & f(d_2) \end{Bmatrix}, \tag{7}$$

qui nous conduit au *centre de dilatation plane*,

$$f(d) = \frac{1}{2} [f(d_1) + f(d_2)] \tag{8}$$

et au *moment concentré*

$$f(m) = \frac{1}{2} [f(m_1) + f(m_2)] . \tag{9}$$

La dernière relation est aussi un'invariant dans le cas plan, donc le moment concentré se comporte aussi comme une charge d'ordre zéro dans ce cas.

On observe qu'en passant d'un point A à un point voisin O on met en évidence une charge d'ordre supérieur, dont l'intensité s'obtient par la multiplication avec une longueur (tenseur du premier ordre). En partant d'une charge d'ordre n on obtient donc, par ce procédé, une charge d'ordre $(n + 1)$.

Par la contraction tensorielle on peut obtenir encore d'autres charges d'ordre plus petit.

4. APPLICATIONS. – Dans beaucoup de traités classiques (par exemple [2], [7]) l'effet des moments concentrés est introduit à l'aide des moments dirigés (un seul moment dirigé), ce qui n'est pas correct que dans des cas tout à fait particuliers. Ce problème peut être mis en liaison avec le problème des directions principales du tenseur.

Par exemple, dans le cas plan les directions principales seront précisées par

$$\operatorname{tg} 2\alpha = - \frac{f(m_1) - f(m_2)}{f(d_1) - f(d_2)}, \tag{10}$$

où α est l'angle formé avex l'axe Ox^1, et nous conduisent à

$$(11) \qquad f_{\text{extr}}(d_\alpha) = f(d) \pm \frac{1}{2}\sqrt{[f(d_1) - f(d_2)]^2 + [f(m_1) - f(m_2)]^2}$$

et à

$$(11') \qquad f(m_\alpha) = f(m).$$

De même, les directions principales précisées par

$$(12) \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{f(d_1) - f(d_2)}{f(m_1) - f(m_2)}$$

sont les bissectrices des directions déterminées ci–dessus et conduisent à

$$(13) \qquad f_{\text{extr}}(m_\alpha) = f(m) \pm \frac{1}{2}\sqrt{[f(d_1) - f(d_2)]^2 + [f(m_1) - f(m_2)]^2}$$

et à

$$(13') \qquad f(d_\alpha) = f(d).$$

Les formules (11') et (13') permettent d'observer que l'influence d'un moment concentré ou d'un centre de dilatation ne peut être introduite correctement à l'aide d'un moment dirigé ou à l'aide d'un dipôle de forces que si la direction de ces dernières charges est une direction principale pour les dipôles, respectivement pour les moments dirigés.

Dans le cas du demi–plan élastique $x^2 \geq 0$ on a pour un point de la frontière

$$(14) \qquad f(m_2) = f(m_1) \quad , \quad f(d_2) = -\mu f(d_1),$$

où μ est le coefficient de contraction transversale de Poisson. La ligne de séparation et la normale à celle–ci sont des directions principales pour les dipôles dans le point considéré, ce qui explique les résultats donnés dans [2] et [7].

En représentant le tenseur (7) à l'aide des coordonnées cartésiennes obliques, on peut introduire dans un point anguleux de la frontière d'un domaine plan le moment concentré par la formule

$$(15) \qquad f(m) = \frac{1}{2}[f(m_{n_1}) + f(m_{n_2})] + \frac{1}{2}[f(d_{s_1}) - f(d_{s_2})] \operatorname{ctg} \omega,$$

où les indices n_1, n_2 et s_1, s_2 correspondent aux directions normales respectivement tangentielles dans ce point. Les indices 1 et 2 correspondent aux deux tangentes dans le point considéré, qui forment l'angle ω. C'est ainsi qu'on peut entreprendre une étude plus correcte que celles faites jusqu'à présent pour le problème de S. D. Carothers (cfr. [1]) (le coin plan élastique actionné par un moment concentré dans le sommet) et le paradoxe correspondant mis en évidence par E. Sternberg et W.T. Koiter (cfr. [5]).

On peut remarquer que les résultats ci–dessus ne dépendent pas de la nature du solide déformable considéré, nécessitant seulement la possibilité d'appliquer la superposition des effets.

Un problème qui reste ouvert est la liaison entre les moments concentrés définis ci–dessus et les moments massiques qui apparaîssent en élasticité asymétrique.

RÉFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.

[1] CAROTHERS S. D., *Plane strain in a wedge*, « Proc. Roy. Soc. Edinbourg », *23*, 292 (1912).

[2] FÖPPL L., *Drang und Zwang. Eine höhere Festigkeitslehre für Ingenieure.* – III. *Der ebene Spannungszustand*, Leibnitz–Verlag, München (1947).

[3] KRÖNER E., *Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen*, Springer–Verlag, Berlin–Göttingen–Heidelberg (1958).

[4] LOVE A. E. H., *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, University Press, Cambridge–London (1892).

[5] STERNBERG E. e KOITER W. T., *The wedge under a concentrated couple. A paradox in the two–dimensional theory of elasticity*, « Journal of Appl. Mech. », *25*, nr. 4, 575 (1958).

[6] TEODORESCU P. P., *Probleme plane in teoria elasticității*, vol. I, Ed. Acad. R.P.R., București (1961).

[7] TIMOSHENKO S. P. e GOODIER J. N., *Theory of elasticity*, IInd ed., McGraw–Hill Book Co., Inc. New York–Toronto–London (1951).