Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Orazio Sorace

Piani grafici non desarguesiani e sistemi ternari di Skornyakov

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.3, p. 393–397.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_3_393_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Geometria. — *Piani grafici non desarguesiani e sistemi ternari di Skornyakov* (*). Nota di ORAZIO SORACE, presentata (**) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — A study of some properties concerning a Skornyakov ternary system associated with the points O , U , V of a [V , UV ; U , OV] — and of a [U , UV ; V , OU]-Desarguesian plane.

1. Si consideri un piano grafico irriducibile in cui, detti O , U , V tre suoi punti non allineati, valga il piccolo teorema di Desargues con centro V ed asse UV, quando due vertici corrispondenti dei due triangoli prospettivi giacciano sulla retta OV e due lati corrispondenti, passanti per tali vertici, si intersechino in U. Un tale piano sarà chiamato un piano [V , UV ; U , OV]-desarguesiano; esso è un piano (V , UV ; U , OV)-desarguesiano (cioè, [1], p. 380, vale ivi il piccolo teorema di Desargues con centro V ed asse UV, quando due vertici corrispondenti dei due triangoli prospettivi giacciano sulla retta OV ed i due lati corrispondenti, non passanti per tali vertici, si intersechino in U), e quindi è un piano (V , UV)-desarguesiano.

Nel presente lavoro vengono assegnate delle caratterizzazioni di sistemi ternari di Skornyakov, [2], p. 18, associati a piani [V , UV ; U , OV]-desarguesiani ed a piani [U , UV ; V , OU]-desarguesiani. Si dimostra poi che in un piano (V,UV;U,OV)-desarguesiano le due operazioni naturali di addizione a destra ed a sinistra portano allo stesso risultato e si introduce una terza operazione di addizione, che permette di generalizzare ad un sistema ternario di Skornyakov la seconda condizione di linearità relativa ad un sistema ternario di M. Hall [3], p. 99.

Nel seguito, indicando con A , B , C , $\cdots$ dei punti e con $\alpha , \beta , \gamma , \cdots$ delle rette, con il simbolo (A , B , C , $\cdots$) intenderemo esprimere che i punti A , B , C , $\cdots$ sono allineati e con $(\alpha , \beta , \gamma , \cdots)$ significheremo che le rette $\alpha , \beta , \gamma , \cdots$ si intersecano in uno stesso punto.

2. In un sistema ternario di Skornyakov relativo ai punti O , U , V, siano $f(a)$ e $g(a)$ rispettivamente le soluzioni delle equazioni $ax = a$ e $xa = a$, $(a \neq 0)$, e sia $f(0) = g(0) = 0$.

Consideriamo le due operazioni naturali di addizione a destra e di addizione a sinistra definite rispettivamente così:

$$a + \bar{b} = \mathrm{T}(a , f(a) , b)$$
$$\bar{a} + b = \mathrm{T}(g(a) , a , b),$$

essendo T il simbolo della operazione ternaria.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di Ricerca matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 12 marzo 1966.

Se e solo se un piano è (V , UV ; U , OV)*–desarguesiano, in ogni sistema ternario relativo ad* O , U , V, *risulta*

$$a + \bar{b} = \bar{a} + b. \tag{1}$$

Si suppongano a e b non nulli. In caso contrario la (1) è ovvia. Si considerino i due triangoli $A_1 A_2 A_3$ e $B_1 B_2 B_3$, essendo $A_1 = O\,(0\,,0)$, $A_2\,(g\,(a)\,,a)$, $A_3\,(a\,,a)$, $B_1\,(0\,,b)$, $B_2\,(g\,(a)\,,\bar{a}+b)$, $B_3\,(a\,,\bar{a}+b)$. Se il piano è (V , UV ; U , OV)–desarguesiano risulta $(B_1\,,B_3\,,N)$, essendo $N\,(f\,(a)) = OA_3 \cap UV$, e quindi la (1). Viceversa, se in un qualsiasi sistema ternario relativo ai punti O, U , V risulta soddisfatta la (1) per ogni coppia di numeri non nulli a e b, è $(B_1\,,B_3\,,N)$ e quindi vale il teorema di (V , UV ; U , OV)–Desargues, con l'ulteriore punto fisso O; ma questa ultima condizione non è restrittiva, [3], p. 80.

3. *Se un piano è* [V , UV ; U , OV]*–desarguesiano, esso è* (V , UV ; U , OV)*–desarguesiano.*

Si considerino infatti i due triangoli $A_1 A_2 A_3$ e $B_1 B_2 B_3$ tali che risulti $(A_1\,,B_1\,,V\,,O)$, $(A_2\,,B_2\,,V)$, $(A_3\,,B_3\,,V)$, $(A_2\,,A_3\,,U)$, $(B_2\,,B_3\,,U)$, $(A_1 A_2\,,B_1 B_2\,,UV)$. Posto $S = A_1 A_3 \cap UV$, si vuole dimostrare che $(B_1\,,B_3\,,S)$. Per assurdo, si supponga $B_1 \neq B_4 = B_3 S \cap B_1 B_2$, e si costruiscano i punti $A_4 = A_1 A_2 \cap B_4 V$, $A_5 = A_2 A_3 \cap A_1 B_1$, $B_5 = B_2 B_3 \cap A_1 B_1$. Si considerino i due triangoli $A_2 A_4 A_5$, $B_2 B_4 B_5$. Poiché il piano è [V , UV ; U , OV]–desarguesiano, sarà $(A_4 A_5\,,B_4 B_5\,,UV)$. Si considerino indi i triangoli $A_3 A_4 A_5$, $B_3 B_4 B_5$; sarà $(A_3 A_4\,,B_3 B_4\,,UV)$ e quindi $(A_3\,,A_4\,,S)$, il che è assurdo a meno che non sia $A_4 = A_1$ e quindi $B_4 = B_1$ ed il piano è (V , UV ; U , OV)–desarguesiano.

Se un piano è [V , UV ; U , OV]*–desarguesiano, sarà soddisfatta la condizione di Reidemeister relativa ad* U , V , W, *essendo* W *un qualsiasi punto di* UV, *distinto da questi.*

Siano infatti A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4 dei punti tali che $(A_1\,,B_1\,,O\,,V)$, $(A_2\,,B_2\,,V)$, $(A_3\,,B_3\,,V)$, $(A_4\,,B_4\,,V)$, $(A_1\,,A_4\,,W)$, $(A_2\,,A_3\,,O\,,W)$, $(B_1\,,B_4\,,W)$, $(B_2\,,B_3\,,W)$, $(A_1\,,A_2\,,U)$, $(A_3\,,A_4\,,U)$, $(B_1\,,B_2\,,U)$. Si vuole dimostrare che $(B_3\,,B_4\,,U)$. Poiché il piano è [V , UV ; U , OV]–desarguesiano, dai triangoli A_1, A_2, A_3 e B_1, B_2, B_3 si deduce che $(A_1 A_3\,,B_1 B_3\,,UV)$. Si ponga intanto $C_4 = B_3 U \cap VA_4$. Per il teorema prima dimostrato il piano è (V , UV ; U , OV)–desarguesiano e quindi dai triangoli A_1, A_3, A_4 e B_1, B_3, C_4 si deduce che $(A_1 A_4\,,B_1 C_4\,,UV)$; ma è $(A_1\,,A_4\,,W)$ quindi è $(B_1\,,C_4\,,W)$ e di conseguenza $C_4 = B_4$ ed è $(B_3\,,B_4\,,U)$.

Dai due teoremi sopra dimostrati segue, [3], p. 100, che il piano è (V, UV)–desarguesiano e viceversa. Quindi, *se e solo se un piano* è [V , UV , U , OV]–*desarguesiano, esso è* (V , UV)*–desarguesiano.*

4. *Se e solo se un piano è* [V, UV ; U , OV]*–desarguesiano, in ogni sistema ternario relativo ad* O , U , V, *risulta, per ogni terna di numeri* a , b , c

$$a + \overline{T\,(l\,,m\,,c)} = T\,(a\,,m\,,c) \tag{2}$$

dove m ed l soddisfano alle

$$am = a + \bar{b} \tag{3}$$

$$lm = b. \tag{4}$$

Supponiamo a , b , c non nulli. In caso contrario la (2) è ovvia. Si considerino i punti A (a , a) , B_1 $(0 , b)$, C $(0 , c)$. Sia N $(f(a))$ cioè $N = OA \cap UV$ e sia $B_2 = B_1 N \cap AV$ e quindi B_2 $(a , a + \bar{b})$. Sia ancora $M = OB_2 \cap UV$. Il numero (m) corrispondente ad M soddisfa alla (3). Si costruisca il punto $B_3 = OM \cap UB_1$. Se chiamiamo l la prima coordinata di B_3, sarà soddisfatta la (4). Sia $A_2 = CM \cap AV$, $A_3 = CM \cap B_3V$, ed $A_1 = A_3U \cap OV$. Se poniamo $h = T(a , m , c)$ e $p = T(l , m , c)$, sarà A_2 (a , h) , A_3 (l , p) , A_1 $(0 , p)$.

Se il piano è [V , UV ; U , OV]–desarguesiano, considerando i triangoli A_1 , A_2 , A_3 e B_1 , B_2 , B_3 si deduce che è (A_1 , A_2 , N) e quindi si ha la (2). E viceversa.

Osserviamo che, poiché in un piano [V , UV ; U , OV]–desarguesiano e quindi (n. 3) (V , UV)–desarguesiano vale, [2], p. 22, la condizione di linearità, la (2), tenendo presente le (3) e (4), equivale alla condizione di associatività dell'addizione.

Nell'enunciato del teorema si è voluta indicare la condizione che il piano sia [V , UV ; U , OV]–desarguesiano, anziché la condizione equivalente che il piano sia (V , UV)–desarguesiano, perché nella dimostrazione si è fatto uso soltanto del teorema di [V , UV ; U , OV]–Desargues.

5. Se $f(b) \neq 0$, indichiamo con $\{a + b\}$ la soluzione dell'equazione

$$xf(b) = T(a , f(b) , b).$$

Nel caso particolare del sistema ternario di M. Hall, [4], p. 355, è $\{a + b\} = a + b$. Sarà $\{a + b\} = 0$, se e solo se è $T(a , f(b) , b) = 0$.

Se e solo se un piano è (U , UV ; V , OU)*–desarguesiano, in ogni sistema ternario relativo ad* O , U , V, *per ogni coppia di numeri* b', b , $(f(b) \neq 0)$, *tali che sia* $\{b' + b\} = 0$, *risulta* $T(b', m , bm) = 0$, *per qualsiasi* m.

Supponiamo che sia $m \neq f(b)$ e che b , b', m non siano nulli. In caso contrario il teorema è ovvio. Si considerino i punti A_2 (b , b) ed M (m). Si costruiscano i punti N $(f(b)) = OA_2 \cap UV$, B_2 $(0 , b)$, A_3 (b , bm) , B_3 $(0 , bm)$, $B_1 = OU \cap B_2N$. Se b' è la prima coordinata di B_1, sarà $\{b' + b\} = 0$. Considerando i triangoli OA_2A_3 , $B_1B_2B_3$, se il piano è (U , UV ; V , OU)–desarguesiano sarà (B_1 , B_3 , M) e quindi $T(b', m , bm) = 0$; e viceversa (la condizione dell'ulteriore punto fisso O non è restrittiva).

Se e solo se un piano è (U , UV ; V , OU)*–desarguesiano, in ogni sistema ternario relativo ad* O , U , V, *per ogni terna di numeri* a , b , m , $(f(b) \neq 0)$, *risulta*

$$T(a , m , bm) = \{a + b\} m. \tag{5}$$

Sia $m \neq f(b)$ e siano a, b, m non nulli. In caso contrario la (5) è ovvia. Si considerino i punti del teorema precedente ed il punto $A(a, 0)$ e si costruiscano questi altri punti: $B'_2 = VA \cap NB_1$, $B'_3 = VA \cap MB_1$, $A'_2 = B'_2 U \cap ON$, $A'_3 = VA'_2 \cap B'_3 U$. Posto $h = T(a, f(b), b)$, sarà $B'_2(a, h)$, $A'_2(k, h)$, essendo k tale che $kf(b) = h$ e quindi $k = \{a + b\}$. Se il piano è (U, UV; V, OU)–desarguesiano sarà, per il teorema precedente, (B_1, B_3, M) e quindi $B'_3(a, T(a, m, bm))$ ed $A'_3(k, T(a, m, bm))$. Considerando i triangoli O, A'_2, A'_3 e B_1, B'_2, B'_3 si deduce che (O, A'_3, M) e quindi la (5). Viceversa, se vale la (5), nel caso $\{b' + b\} = 0$, essa ci dà $T(b', m, bm) = 0$ e quindi (B_1, B_3, M). Poiché, per la (5), è (O, A'_3, M), vale il teorema di (U, UV; V, OU)–Desargues, con l'ulteriore condizione, non restrittiva, del punto fisso O.

Il metodo qui seguito per caratterizzare la (5) è analogo a quello usato in [3], p. 99, per caratterizzare la seconda condizione di linearità, che è quella cui si riduce la (5) nel caso del sistema ternario di M. Hall.

6. *Se e solo se un piano è* [U, UV; V, OU]–*desarguesiano, in ogni sistema ternario relativo ad* O, U, V, *per ogni terna di numeri* a, b, m ($m \neq 0$, $f(b)$), *chiamato* x_0 *quel numero soddisfacente alla*

$$x_0 m = T(a, m, bm), \tag{6}$$

risulta

$$T(x_0, f(b), c) = 0 \tag{7}$$

ovvero

$$T(x_0, f(b), c) = T(a, f(b), b + \bar{c}), \tag{8}$$

a seconda che c *soddisfa alla*

$$T(a, f(b), b + \bar{c}) = 0 \tag{9}$$

ovvero alla

$$T(a, f(b), b + \bar{c}) = T(a, m, bm) \tag{10}$$

rispettivamente.

Per evitare casi banali supporremo a e b diversi da zero. Si considerino i punti $A(a, 0)$, $B(b, 0)$, $M(m)$. Si costruiscano i punti $A_1 = VB \cap OM$, $B_1 = VO \cap UA_1$, $B_2 = VA \cap B_1 M$, $A_2 = B_2 U \cap OM$. Posto $h = T(a, m, bm)$, sarà $B_2(a, h)$ e, per la (6), $A_2(x_0, h)$. Posto $N(f(b))$, si costruiscano i punti $B_3 = VO \cap B_2 N$, $A_3 = VB \cap B_3 U$, $C = OV \cap A_3 N$. Se è $C(0, c)$ e quindi $B_3(0, b + \bar{c})$, c soddisfa alla (10). Si costruiscano ora i punti $B_4 = OU \cap B_2 N$, $B_5 = B_4 V \cap B_1 M$, $A_5 = UB_5 \cap OM$, $A_4 = OU \cap VA_5$. Posto $A_4(x_1, 0)$, $B_4(l, 0)$ sarà

$$T(l, f(b), b + \bar{c}) = 0 \tag{11}$$

$$x_1 m = T(l, m, bm). \tag{12}$$

Se il piano è [U , UV ; V , OU]–desarguesiano, considerando i triangoli $A_1 A_5 B$, $B_1 B_5 O$ si deduce che ($A_5 B$, $B_5 O$, UV). Dai triangoli $A_3 A_5 B$, $B_3 B_5 O$ si deduce indi che ($A_3 A_5$, $B_3 B_5$, UV). Quindi dai triangoli $A_3 A_4 A_5$, $B_3 B_4 B_5$ si ricava che ($A_3 A_4$, $B_3 B_4$, UV), cioè $A_4 \in CN$. Resta quindi dimostrato che, nelle ipotesi (11) e (12), risulta $T(x_1 , f(b) , c) = 0$, cioè che vale la (7) (dove al posto di x_0 si ponga x_1) nelle ipotesi (6) e (9) (dove al posto di a si ponga l). Considerando poi i triangoli $A_2 A_4 A_5$, $B_2 B_4 B_5$, si deduce che $A_2 \in CN$ e vale quindi la (8) nelle ipotesi (6) e (10).

Viceversa, se nelle ipotesi (11) e (12), risulta $T(x_1 , f(b) , c) = 0$ e quindi $A_4 \in CN$ e se risulta soddisfatta la (8), il piano è [U , UV ; V , OU]–desarguesiano. Anche qui vale l'osservazione fatta alla fine del n. 4.

Nel caso del sistema ternario di M. Hall, poiché in un piano (U , UV)–desarguesiano vale la seconda condizione di linearità, dalla (6) si ricava $x_0 = a + b$ e la (7) o la (8) esprime l'associatività dell'addizione nei casi in cui valga rispettivamente la (9) o la (10).

BIBLIOGRAFIA.

[1] B. SEGRE, *Lectures on Modern Geometry with an appendix by L. Lombardo-Radice*, Edizioni Cremonese, Roma, 1961, pp. 365–382.

[2] L. A. SKORNYAKOV, *Natural domains of Veblen–Wedderburn projective planes*, « American Mathem. Society, Translations », Series 1, *1*, 15–50 (1962).

[3] G. PICKERT, *Projektive Ebenen*, Springer–Verlag, Berlin 1955, pp. 97–100.

[4] M. HALL, *The theory of groups*, The Macmillan Company, New York 1964, pp. 353–364.