Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Elisa Udeschini Brinis

Equazioni di campi spinoriali dedotte da un'unica lagrangiana. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.4, p. 577–585.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_4_577_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Fisica matematica. — *Equazioni di campi spinoriali dedotte da un'unica lagrangiana.* Nota I [(*)] di ELISA UDESCHINI BRINIS, presentata [(**)] dal Socio B. FINZI.

SUMMARY. — In this first paper a symmetric second-rank spinor is shown to be expressible by one potential spinor with one dotted and one undotted index. This result allows us, when considering a general field defined by a second-rank symmetric spinor and by its complex conjugate, to derive all field equations from a variational principle, by varying the potential spinor and its complex conjugate.

Un ben noto teorema di Clebsch permette di scomporre il campo di un generico vettore in un campo irrotazionale ed in uno solenoidale. Tale teorema si estende ai tensori doppi emisimmetrici funzioni dei punti dello spazio-tempo e permette di esprimere un generico tensore doppio *emisimmetrico* $F_{\mu\nu}$ mediante i tensori derivati di *due* vettori potenziali φ_μ e ψ_ν dello spazio-tempo, secondo la [(1)]:

$$F_{\mu\nu} = \varphi_{\nu/\mu} - \varphi_{\mu/\nu} + \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\,\psi^{\alpha/\beta} \qquad \begin{pmatrix} \mu\,,\nu\,,\alpha\,,\beta = 0\,,1\,,2\,,3 \\ \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} = \text{tensore di Ricci} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Il vettore φ_μ caratterizza la parte irrotazionale del tensore $F_{\mu\nu}$; il vettore ψ_ν ne caratterizza la parte solenoidale. Ai due vettori potenziali φ_μ e ψ_ν si può imporre la condizione di solenoidalità:

$$\varphi_\mu{}^{/\mu} = 0 \qquad ; \qquad \psi^\nu{}_{/\nu} = 0\,. \tag{2}$$

In virtù del teorema precedente, le equazioni di un campo caratterizzato da un tensore doppio emisimmetrico si possono trarre tutte da un unico principio variazionale $\delta \int_\tau \mathfrak{L}\, d\tau = 0$ (essendo $\mathfrak{L}$ la densità lagrangiana funzione del campo e dei suoi potenziali e τ una regione qualsivoglia dello spazio-tempo), operando una arbitraria variazione sui due potenziali che ne lasci inalterati i valori al contorno [(2)].

In questa Nota mi propongo dapprima di stabilire un analogo del teorema di Clebsch per gli *spinori doppi simmetrici*, tenendo conto della corrispondenza che sussiste fra questi ed i tensori doppi emisimmetrici reali dello spazio-tempo pseudoeuclideo.

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca matematici del C.N.R.

(**) Nella seduta del 12 febbraio 1966.

(1) Cfr. B. FINZI, *Sul principio della minima azione e sulle equazioni elettromagnetiche che se ne deducono*. Questi « Rendiconti », vol. XII, fasc. 4 (1952).

(2) Cfr. E. UDESCHINI BRINIS, *Campi fisici bivettoriali e loro genesi variazionale*. Questi « Rendiconti », vol. XXXIX, fasc. 5 (1965).

Trovo che uno spinore doppio simmetrico Φ_{AB} (3) si può sempre esprimere mediante le derivate spinoriali di *un solo* spinore doppio $\chi_{\mathbf{RS}}$ (con uno dei due indici puntato (*)), che chiamo spinore potenziale, le cui parti hermitiana ed anti–hermitiana corrispondono rispettivamente ai due vettori potenziali φ_μ e ψ_ν del tensore emisimmetrico reale $F_{\mu\nu}$ corrispondente allo spinore Φ_{AB}.

Anche allo spinore potenziale $\chi_{\mathbf{RS}}$ si può imporre la condizione di solenoidalità ed è anzi possibile dare alla formula che lega lo spinore doppio Φ_{AB} al suo spinore potenziale una espressione in cui tale solenoidalità è già scontata.

Il risultato precedente mi permette di dedurre tutte le equazioni di un generico campo spazio–temporale, caratterizzato da uno spinore doppio simmetrico e dal suo complesso coniugato, mediante un principio variazionale identico a quello che regge i campi tensoriali, operando una arbitraria variazione sullo spinore potenziale e sul suo coniugato che ne lasci inalterati i valori al contorno.

Stabilisco le equazioni di campo per una generica densità lagrangiana, sia quando questa dipende solo da uno spinore doppio e dal suo coniugato: $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\Phi_{AB}, \bar{\Phi}_{AB})$, sia quando dipende anche esplicitamente dai rispettivi potenziali: $\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\Phi_{AB}, \bar{\Phi}_{AB}, \chi_{\mathbf{RS}}, \bar{\chi}_{\mathbf{RS}})$.

Particolarizzando opportunamente la lagrangiana, ottengo infine le equazioni di Maxwell in forma spinoriale e le equazioni di Dirac per particelle di spin 1.

1. Estensione spinoriale del teorema di Clebsch.

Mediante lo spin–tensore $S_{\mu\nu AB}$, emisimmetrico rispetto agli indici tensoriali μ, ν e simmetrico rispetto agli indici spinoriali A, B, definito dalle:

$$S_{\mu\nu AB} = \frac{1}{2}\left(g_\mu{}^{\mathbf{C}}{}_A\, g_{\nu\mathbf{C}B} - g_\nu{}^{\mathbf{C}}{}_A\, g_{\mu\mathbf{C}B}\right) \tag{3}$$

(essendo $g_\mu{}^{\mathbf{C}}{}_A$ lo spin–tensore fondamentale) (4), si può stabilire una corrispondenza fra tensori doppi emisimmetrici reali dello spazio–tempo pseudo–euclideo e spinori doppi simmetrici.

(3) Mentre gli indici minuscoli greci assumono i valori 0, 1, 2, 3, gli indici maiuscoli assumono i valori 1, 2.

(4) Cfr. E. M. Corson, *Introduction to tensors, spinors, and relativistic wave–equations*. Blackie & Son Limited, London and Glasgow (1953).

La metrica dello spazio–tempo ha la segnatura $+ - - -$: $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta = dx^{0^2} - (dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2})$ e le componenti dello spin–tensore fondamentale sono:

$$\left\| g_{0\mathbf{A}B} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} \; ; \quad \left\| g_{1\mathbf{A}B} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix} \; ; \quad \left\| g_{2\mathbf{A}B} \right\| = \begin{Vmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{Vmatrix} \; ; \quad \left\| g_{3\mathbf{A}B} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} .$$

(*) Per ragioni tipografiche gli indici puntati sono sostituiti con indici in grassetto.

Ad ogni tensore doppio emisimmetrico reale $F_{\mu\nu}$ corrisponde un solo spinore doppio simmetrico Φ_{AB}:

$$\Phi_{AB} = \frac{1}{8} S_{\mu\nu AB} F^{\mu\nu} \tag{4}$$

e lo spinore doppio simmetrico Φ_{AB}, col suo complesso coniugato $\overline{\Phi}_{AB} \equiv \Phi_{\mathbf{AB}}$, individua il tensore $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = S_{\mu\nu}{}^{AB} \Phi_{AB} + \overline{S}_{\mu\nu}{}^{AB} \overline{\Phi}_{AB} . \tag{5}$$

Considerato allora uno spinore doppio simmetrico Φ_{AB}, potremo sempre esprimerlo, mediante la (4), in funzione di un tensore doppio emisimmetrico reale $F_{\mu\nu}$.

Applicando al tensore $F_{\mu\nu}$ la decomposizione (1), avremo:

$$\Phi_{AB} = \frac{1}{8} S_{\mu\nu AB} (\varphi^{\nu/\mu} - \varphi^{\mu/\nu} + \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \psi_{\alpha/\beta}) . \tag{6}$$

Poiché le componenti del tensore di Ricci si esprimono con la radice quadrata del determinante della metrica, il cui valore è -1 nel riferimento scelto, se il tensore $F_{\mu\nu}$ è reale, i due vettori potenziali φ_μ e ψ_α risultano rispettivamente reale il primo ed immaginario il secondo.

Per la corrispondenza fra vettori dello spazio–tempo e spinori doppi (con un indice puntato e l'altro no), che si stabilisce mediante lo spin–tensore fondamentale $g_{\alpha\mathbf{A}B}$, introduciamo gli spinori $\varphi_{\mathbf{R}S}$ e $\psi_{\mathbf{LM}}$ corrispondenti ai due vettori potenziali φ_μ e ψ_α secondo le:

$$\varphi_{\mathbf{R}S} = g^\alpha{}_{\mathbf{R}S}\, \varphi_\alpha \quad ; \quad \psi_{\mathbf{LM}} = g^\beta{}_{\mathbf{LM}}\, \psi_\beta \tag{7}$$

e le inverse:

$$\varphi_\alpha = \frac{1}{2} g_{\alpha\mathbf{R}S}\, \varphi^{\mathbf{R}S} \quad ; \quad \psi_\beta = \frac{1}{2} g_{\beta\mathbf{LM}}\, \psi^{\mathbf{LM}} . \tag{7'}$$

Poiché lo spin–tensore fondamentale soddisfa la condizione hermitiana: $\bar{g}_{\alpha\mathbf{A}B} = g_{\alpha\mathbf{B}A}$, i due spinori $\varphi_{\mathbf{R}S}$ e $\psi_{\mathbf{LM}}$ risultano rispettivamente hermitiano il primo ed anti–hermitiano il secondo.

La (6) diventa:

$$8\, \Phi_{AB} = S_{\mu\nu AB} \frac{1}{2} (g^{\nu\mathbf{R}S} \varphi_{\mathbf{R}S}{}^{/\mu} - g^{\mu\mathbf{R}S} \varphi_{\mathbf{R}S}{}^{/\nu} + \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\, g^\alpha{}_{\mathbf{LM}} \psi^{\mathbf{LM}/\beta}) =$$

$$= \frac{1}{4} (g_\mu{}^{\mathbf{C}}{}_A\, g_{\nu\mathbf{C}B} - g_\nu{}^{\mathbf{C}}{}_A\, g_{\mu\mathbf{C}B}) (g^{\nu\mathbf{R}S} \varphi_{\mathbf{R}S}{}^{/\mu} - g^{\mu\mathbf{R}S} \varphi_{\mathbf{R}S}{}^{/\nu}) + \frac{1}{2} S_{\mu\nu AB}\, \varepsilon^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta}\, g^\alpha{}_{\mathbf{LM}} \psi^{\mathbf{LM}/\beta} =$$

$$= \frac{1}{2} (g_\mu{}^{\mathbf{C}}{}_A\, \delta^{\mathbf{R}}_{\mathbf{C}}\, \delta^S_B\, \varphi_{\mathbf{R}S}{}^{/\mu} + g_\nu{}^{\mathbf{C}}{}_B\, \delta^{\mathbf{R}}_{\mathbf{C}}\, \delta^S_A\, \varphi_{\mathbf{R}S}{}^{/\nu} + g_\mu{}^{\mathbf{C}}{}_B\, \delta^{\mathbf{R}}_{\mathbf{C}}\, \delta^S_A\, \varphi_{\mathbf{R}S}{}^{/\mu} + g_\nu{}^{\mathbf{C}}{}_A\, \delta^{\mathbf{R}}_{\mathbf{C}}\, \delta^S_B\, \varphi_{\mathbf{R}S}{}^{/\nu}) +$$

$$- (g_\alpha{}^{\mathbf{C}}{}_A\, g_{\beta\mathbf{C}B} - g_{\alpha\beta}\, \varepsilon_{AB})\, g^\alpha{}_{\mathbf{LM}} \psi^{\mathbf{LM}/\beta} =$$

$$= g_\mu{}^{\mathbf{C}}{}_A\, \varphi_{\mathbf{C}B}{}^{/\mu} + g_\mu{}^{\mathbf{C}}{}_B\, \varphi_{\mathbf{C}A}{}^{/\mu} - (2\, \varepsilon_{AM}\, g_{\beta\mathbf{L}B} - \varepsilon_{AB}\, g_{\beta\mathbf{LM}})\, \psi^{\mathbf{LM}/\beta}$$

(essendo δ^S_B ; $\delta^{\mathbf{R}}_{\mathbf{C}} \cdots$ simboli di Kronecker ed ε_{AB} lo spinore doppio emisimmetrico fondamentale: $\| \varepsilon_{AB} \| = \| \varepsilon^{AB} \| = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix}$, che permette di passare dalla rappresentazione covariante a quella controvariante degli spinori e viceversa, secondo le: $\varphi_A = \varepsilon_{AB}\, \varphi^B$; $\varphi^A = \varepsilon^{BA}\, \varphi_B$).

Tenendo conto dell'identità:

$$\psi^{\mathbf{LM}/\beta}\, \varepsilon_{AM}\, g_{\beta\mathbf{L}B} + \psi^{\mathbf{L}}{}_{M}{}^{/\beta}\, \varepsilon_{AB}\, g_{\beta\mathbf{L}}{}^{M} + \psi^{\mathbf{L}}{}_{B}{}^{/\beta}\, \varepsilon_{A}{}^{M} g_{\beta\mathbf{L}M} = 0$$

si ha poi:

$$8\,\Phi_{AB} = g_{\mu}{}^{\mathbf{C}}{}_{A}\, \varphi_{\mathbf{C}B}{}^{/\mu} + g_{\mu}{}^{\mathbf{C}}{}_{B}\, \varphi_{\mathbf{C}A}{}^{/\mu} - \varepsilon_{AM}\, (g_{\beta\mathbf{L}B}\, \psi^{\mathbf{LM}/\beta} + g_{\beta\mathbf{L}}{}^{M}\, \psi^{\mathbf{L}}{}_{B}{}^{/\beta}) =$$

$$= g_{\mu}{}^{\mathbf{C}}{}_{A}\, \varphi_{\mathbf{C}B}{}^{/\mu} + g_{\mu}{}^{\mathbf{C}}{}_{B}\, \varphi_{\mathbf{C}A}{}^{/\mu} + g_{\beta}{}^{\mathbf{L}}{}_{B}\, \psi_{\mathbf{L}A}{}^{/\beta} + g_{\beta}{}^{\mathbf{L}}{}_{A}\, \psi_{\mathbf{L}B}{}^{/\beta}$$

e quindi:

$$\Phi_{AB} = \frac{1}{8}\, [g_{\mu}{}^{\mathbf{C}}{}_{A}\, (\varphi_{\mathbf{C}B} + \psi_{\mathbf{C}B})^{/\mu} + g_{\mu}{}^{\mathbf{C}}{}_{B}\, (\varphi_{\mathbf{C}A} + \psi_{\mathbf{C}A})^{/\mu}] \,. \tag{8}$$

Posto pertanto:

$$\chi_{\mathbf{C}B} = \varphi_{\mathbf{C}B} + \psi_{\mathbf{C}B} \tag{9}$$

si ottiene:

$$\Phi_{AB} = \frac{1}{8}\, (\chi_{\mathbf{C}B}/{}^{\mathbf{C}}{}_{A} + \chi_{\mathbf{C}A}/{}^{\mathbf{C}}{}_{B}) \,. \tag{10}$$

La (10) traduce l'estensione del teorema di Clebsch per uno spinore doppio simmetrico. Uno spinore doppio simmetrico Φ_{AB} è sempre esprimibile mediante le derivate spinoriali di uno spinore doppio $\chi_{\mathbf{R}S}$ (con uno dei due indici puntato) che chiameremo spinore potenziale.

Lo spinore potenziale $\chi_{\mathbf{R}S}$ corrisponde, per le (7) e (9), ad un vettore complesso che ha come parte reale e come parte immaginaria i due vettori φ_α e ψ_α. In altre parole, la parte hermitiana $\frac{\chi_{\mathbf{R}S} + \bar{\chi}_{\mathbf{S}R}}{2}$ e quella anti-hermitiana $\frac{\chi_{\mathbf{R}S} - \bar{\chi}_{\mathbf{S}R}}{2}$ dello spinore $\chi_{\mathbf{R}S}$ corrispondono rispettivamente ai due vettori potenziali del tensore emisimmetrico reale $F_{\mu\nu}$ corrispondente allo spinore simmetrico Φ_{AB}.

La condizione di solenoidalità dei due vettori φ_α e ψ_α porta alla analoga condizione per lo spinore $\chi_{\mathbf{R}S}$. Difatti, essendo:

$$\varphi_{\mathbf{R}S}{}^{/\mathbf{R}S} = \varphi_{\alpha}{}^{/\beta}\, g^{\alpha}{}_{\mathbf{R}S}\, g_{\beta}{}^{\mathbf{R}S} = 2\, \delta^{\alpha}_{\beta}\, \varphi_{\alpha}{}^{/\beta} = 2\, \varphi_{\alpha}{}^{/\alpha}$$

e così pure:

$$\psi_{\mathbf{R}S}{}^{/\mathbf{R}S} = 2\, \psi_{\alpha}{}^{/\alpha}$$

dalle (2) segue:

$$\chi_{\mathbf{R}S}{}^{/\mathbf{R}S} = 0 \,. \tag{11}$$

Mentre in linguaggio tensoriale le condizioni (2) sono aggiuntive alla formula (1), in forma spinoriale la (11) si può includere nella (10), semplificando quest'ultima in modo che la condizione di solenoidalità sia automaticamente scontata.

Poiché qualunque spinore doppio emisimmetrico si può esprimere come prodotto di uno scalare per lo spinore ε_{AB} (5), potremo infatti porre:

$$\chi_{\mathbf{C}B}/^{\mathbf{C}}{}_{A} - \chi_{\mathbf{C}A}/^{\mathbf{C}}{}_{B} = \rho\varepsilon_{AB}\,. \tag{12}$$

Saturando ambo i membri con ε^{AB} si ottiene:

$$\varepsilon^{AB}\,(\chi_{\mathbf{C}B}/^{\mathbf{C}}{}_{A} - \chi_{\mathbf{C}A}/^{\mathbf{C}}{}_{B}) = 2\rho$$

e quindi:

$$2\rho = \chi_{\mathbf{CB}}{}^{/\mathbf{CB}} - \chi_{\mathbf{C}}{}^{B}/^{\mathbf{C}}{}_{B} = 2\,\chi_{\mathbf{CB}}{}^{/\mathbf{CB}}\,.$$

Tenendo conto della (11), la (12) dà:

$$\chi_{\mathbf{C}B}/^{\mathbf{C}}{}_{A} = \chi_{\mathbf{C}A}/^{\mathbf{C}}{}_{B}\,.$$

La (10) diventa pertanto:

$$\Phi_{AB} = \frac{1}{4}\,\chi_{\mathbf{C}B}/^{\mathbf{C}}{}_{A}\,. \tag{13}$$

La (13) permette di esprimere un qualunque spinore doppio simmetrico Φ_{AB} mediante le derivate spinoriali di uno spinore potenziale $\chi_{\mathbf{R}S}$ a divergenza spinoriale nulla.

Mi sembra interessante sottolineare che nelle formule spinoriali (10) e (13) l'unico spinore potenziale $\chi_{\mathbf{R}S}$ riassume entrambi gli spinori $\varphi_{\mathbf{R}S}$ e $\psi_{\mathbf{R}S}$, mentre nella formula tensoriale (1) i due potenziali vettori φ_α e ψ_α costituiscono due enti distinti. Nella (13), poi, è anche conglobata la condizione di solenoidalità del potenziale.

Osservo infine che, come un tensore doppio emisimmetrico $F_{\mu\nu}$, rispettivamente irrotazionale oppure solenoidale, può essere individuato dal solo potenziale φ_α oppure ψ_α, anche uno spinore doppio simmetrico Φ_{AB} potrà essere individuato dal solo potenziale spinore hermitiano $\varphi_{\mathbf{R}S}$ o dal solo potenziale spinore anti-hermitiano $\psi_{\mathbf{R}S}$, qualora verifichi rispettivamente la condizione:

$$\Phi_{AS}/_{\mathbf{R}}{}^{A} - \Phi_{\mathbf{A}R}/^{\mathbf{A}}{}_{S} = 0 \tag{14}$$

oppure:

$$\Phi_{AS}/_{\mathbf{R}}{}^{A} + \Phi_{\mathbf{A}R}/^{\mathbf{A}}{}_{S} = 0\,. \tag{15}$$

Infatti, per la (5):

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\,F_{\mu\nu/\varrho} &= \varepsilon^{\mu\nu\varrho\sigma}\,(S_{\mu\nu}{}^{AB}\,\Phi_{AB} + \overline{S}_{\mu\nu}{}^{AB}\,\overline{\Phi}_{AB})_{/\varrho} = \\
&= -2\,(g^{\varrho\mathbf{CA}}\,g^{\sigma}{}_{\mathbf{C}}{}^{B} - g^{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{AB})\,\Phi_{AB/\varrho} + 2\,(g^{\varrho AC}\,g^{\sigma\mathbf{B}}{}_{C} - g^{\varrho\sigma}\,\varepsilon^{\mathbf{AB}})\,\Phi_{\mathbf{AB}/\varrho} = \\
&= -2\,(\Phi_{AB}{}^{/\mathbf{CA}}\,g^{\sigma}{}_{\mathbf{C}}{}^{B} - \Phi_{\mathbf{AB}}{}^{/AC}\,g^{\sigma\mathbf{B}}{}_{C})
\end{aligned}$$

(5) E. M. CORSON, loco cit., p. 108.

pertanto l'irrotazionalità di $F_{\mu\nu}$ comporta, per Φ_{AB}, la condizione:

$$\Phi_{AB}{}^{/CA} g^{\sigma}{}_{C}{}^{B} - \Phi_{AB}{}^{/AC} g^{\sigma B}{}_{C} = 0$$

da cui, moltiplicando per $g_{\sigma RS}$, segue la (14).

Così pure, essendo:

$$F_{\mu\nu}{}^{/\nu} = S_{\mu\nu}{}^{AB}\,\Phi_{AB}{}^{/\nu} + \bar{S}_{\mu\nu}{}^{AB}\,\overline{\Phi}_{AB}{}^{/\nu} =$$

$$= \frac{1}{2}(g_{\mu}{}^{CA} g_{\nu C}{}^{B} - g_{\nu}{}^{CA} g_{\mu C}{}^{B})\,\Phi_{AB}{}^{/\nu} + \frac{1}{2}(g_{\mu}{}^{AC} g_{\nu}{}^{B}{}_{C} - g_{\nu}{}^{AC} g_{\mu}{}^{B}{}_{C})\,\Phi_{AB}{}^{/\nu} =$$

$$= \frac{1}{2}(\Phi_{AB/C}{}^{B} g_{\mu}{}^{CA} - \Phi_{AB}{}^{/CA} g_{\mu C}{}^{B} + \Phi_{AB/}{}^{B}{}_{C}\, g_{\mu}{}^{AC} - \Phi_{AB/}{}^{AC} g_{\mu}{}^{B}{}_{C}) =$$

$$= \Phi_{AB/C}{}^{A} g_{\mu}{}^{CB} + \Phi_{AB/}{}^{A}{}_{C}\, g_{\mu}{}^{BC}$$

la solenoidalità di $F_{\mu\nu}$ comporta, per Φ_{AB}, la condizione:

$$\Phi_{AB/C}{}^{A} g_{\mu}{}^{CB} + \Phi_{AB/}{}^{A}{}_{C}\, g_{\mu}{}^{BC} = 0$$

da cui, moltiplicando per $g^{\mu}{}_{RS}$, segue la (15).

2. Campi spinoriali. Deduzione variazionale delle equazioni di campo.

a) *Lagrangiana dipendente soltanto da uno spinore doppio simmetrico e dal suo coniugato.*

Un campo fisico spazio–temporale sia caratterizzato da uno spinore doppio simmetrico Φ_{AB} e dal suo complesso coniugato $\overline{\Phi}_{AB}$.

Consideriamo una densità lagrangiana del tipo:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(\Phi_{AB}, \overline{\Phi}_{AB}). \tag{16}$$

Per il teorema (10), diciamo χ_{RS} lo spinore potenziale dello spinore Φ_{AB} e $\bar{\chi}_{RS}$ il suo complesso coniugato, potenziale di $\overline{\Phi}_{AB}$.

Le equazioni indefinite di campo si possono trarre dal principio variazionale:

$$\delta \int_{\tau} \mathfrak{L}\, d\tau = 0 \tag{17}$$

quando si operi la variazione sui potenziali χ_{RS} e $\bar{\chi}_{RS}$ lasciandone inalterati i valori al contorno σ di τ.

Per la (10) si ha:

$$\left\{\begin{aligned} \delta\Phi_{AB} &= \frac{1}{8}(\delta\chi_{CB}{}^{/\mu} g_{\mu}{}^{C}{}_{A} + \delta\chi_{CA}{}^{/\mu} g_{\mu}{}^{C}{}_{B}) \\ \delta\overline{\Phi}_{AB} &= \frac{1}{8}(\delta\bar{\chi}_{CB}{}^{/\mu} \bar{g}_{\mu}{}^{C}{}_{A} + \delta\bar{\chi}_{CA}{}^{/\mu} \bar{g}_{\mu}{}^{C}{}_{B}) . \end{aligned}\right. \tag{18}$$

D'altra parte, dette $\varphi_{\mathbf{RS}}$ e $\psi_{\mathbf{RS}}$ rispettivamente la parte hermitiana e quella anti-hermitiana dello spinore $\chi_{\mathbf{RS}}$, risulta:

$$\left\{\begin{aligned} \chi_{\mathrm{C}\mathbf{B}} &= \varphi_{\mathrm{C}\mathbf{B}} + \psi_{\mathrm{C}\mathbf{B}} \\ \bar{\chi}_{\mathbf{C}\mathrm{B}} &= \bar{\varphi}_{\mathbf{C}\mathrm{B}} + \bar{\psi}_{\mathbf{C}\mathrm{B}} = \varphi_{\mathbf{B}\mathrm{C}} - \psi_{\mathbf{B}\mathrm{C}}\,. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Le variazioni $\delta\chi_{\mathbf{RS}}$ e $\delta\bar{\chi}_{\mathbf{RS}}$ si possono cioè esprimere entrambe mediante le variazioni indipendenti $\delta\varphi_{\mathbf{RS}}$, $\delta\psi_{\mathbf{RS}}$.

Si ha così:

$$\delta\int_\tau \mathfrak{L}\,(\Phi_{\mathrm{AB}}\,,\,\bar{\Phi}_{\mathrm{AB}})\,d\tau = \int_\tau\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{AB}}}\,\delta\Phi_{\mathrm{AB}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\bar{\Phi}_{\mathrm{AB}}}\,\delta\bar{\Phi}_{\mathrm{AB}}\right)d\tau =$$

$$= \frac{1}{8}\int_\tau\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{AB}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{BA}}}\right) g_{\mu}{}^{\mathbf{C}}{}_{\mathrm{A}}\,(\delta\varphi_{\mathbf{C}\mathrm{B}} + \delta\psi_{\mathbf{C}\mathrm{B}})^{/\mu} + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{AB}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{BA}}}\right) g_{\mu\mathbf{A}}{}^{\mathrm{C}}\,(\delta\varphi_{\mathbf{B}\mathrm{C}} - \delta\psi_{\mathbf{B}\mathrm{C}})^{/\mu}\right] d\tau \text{ (6)}$$

e quindi:

$$\delta\int_\tau \mathfrak{L}\,d\tau = \frac{1}{8}\int_\tau\left[\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{AB}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{BA}}}\right) g_{\mu}{}^{\mathbf{C}}{}_{\mathrm{A}}\,\delta^{\mathbf{R}}_{\mathbf{C}}\,\delta^{\mathrm{S}}_{\mathrm{B}} + \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{AB}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{BA}}}\right) g_{\mu\mathbf{A}}{}^{\mathrm{C}}\,\delta^{\mathbf{R}}_{\mathbf{B}}\,\delta^{\mathrm{S}}_{\mathrm{C}}\right\}\delta\varphi_{\mathbf{RS}}\right]^{/\mu} d\tau +$$

$$+ \frac{1}{8}\int_\tau\left[\left\{\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{AB}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{BA}}}\right) g_{\mu}{}^{\mathbf{C}}{}_{\mathrm{A}}\,\delta^{\mathbf{R}}_{\mathbf{C}}\,\delta^{\mathrm{S}}_{\mathrm{B}} - \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{AB}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{BA}}}\right) g_{\mu\mathbf{A}}{}^{\mathrm{C}}\,\delta^{\mathbf{R}}_{\mathbf{B}}\,\delta^{\mathrm{S}}_{\mathrm{C}}\right\}\delta\psi_{\mathbf{RS}}\right]^{/\mu} d\tau +$$

$$- \frac{1}{8}\int_\tau\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{AB}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{BA}}}\right)^{/\mu} g_{\mu}{}^{\mathbf{C}}{}_{\mathrm{A}}\,\delta^{\mathbf{R}}_{\mathbf{C}}\,\delta^{\mathrm{S}}_{\mathrm{B}} + \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{AB}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{BA}}}\right)^{/\mu} g_{\mu\mathbf{A}}{}^{\mathrm{C}}\,\delta^{\mathbf{R}}_{\mathbf{B}}\,\delta^{\mathrm{S}}_{\mathrm{C}}\right]\delta\varphi_{\mathbf{RS}}\,d\tau +$$

$$- \frac{1}{8}\int_\tau\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{AB}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{BA}}}\right)^{/\mu} g_{\mu}{}^{\mathbf{C}}{}_{\mathrm{A}}\,\delta^{\mathbf{R}}_{\mathbf{C}}\,\delta^{\mathrm{S}}_{\mathrm{B}} - \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{AB}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{BA}}}\right)^{/\mu} g_{\mu\mathbf{A}}{}^{\mathrm{C}}\,\delta^{\mathbf{R}}_{\mathbf{B}}\,\delta^{\mathrm{S}}_{\mathrm{C}}\right]\delta\psi_{\mathbf{RS}}\,d\tau\,.$$

I due primi integrali del secondo membro sono nulli, come si constata trasformandoli in integrali estesi al contorno σ di τ e tenendo conto che, su σ, $\delta\varphi_{\mathbf{RS}}$ e $\delta\psi_{\mathbf{RS}}$ sono nulli.

Si ha pertanto:

$$\delta\int_\tau \mathfrak{L}\,d\tau = -\frac{1}{8}\int_\tau\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{AS}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{SA}}}\right)\Big/^{\mathbf{R}}{}_{\mathrm{A}} + \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{AR}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{RA}}}\right)\Big/_{\mathbf{A}}{}^{\mathrm{S}}\right]\delta\varphi_{\mathbf{RS}}\,d\tau + \tag{20}$$

$$-\frac{1}{8}\int_\tau\left[\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{AS}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{SA}}}\right)\Big/^{\mathbf{R}}{}_{\mathrm{A}} - \left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{AR}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{RA}}}\right)\Big/_{\mathbf{A}}{}^{\mathrm{S}}\right]\delta\psi_{\mathbf{RS}}\,d\tau.$$

(6) Si rilevi che, pur essendo simmetrico lo spinore $\Phi_{\mathrm{AB}}\,(\Phi_{\mathrm{AB}} = \Phi_{\mathrm{BA}})$, non è simmetrico lo spinore ottenuto derivando rispetto ad esso un invariante $\left(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{AB}}} \neq \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{BA}}}\right)$.

Imponendo al principio variazionale (17) di essere verificato qualunque siano, entro τ, $\delta\varphi_{\mathbf{RS}}$ e $\delta\psi_{\mathbf{RS}}$, si ottengono le equazioni:

$$
(21)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{AS}} + \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{SA}}\right)\Big/^{\mathbf{R}}{}_{A} + \left(\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{\mathbf{AR}}} + \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{\mathbf{RA}}}\right)\Big/_{\mathbf{A}}{}^{S} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{AS}} + \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{SA}}\right)\Big/^{\mathbf{R}}{}_{A} - \left(\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{\mathbf{AR}}} + \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{\mathbf{RA}}}\right)\Big/_{\mathbf{A}}{}^{S} = 0 \end{cases}
$$

e, per somma e sottrazione:

$$
(22)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{AS}} + \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{SA}}\right)\Big/^{\mathbf{R}}{}_{A} = 0 \\ \left(\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{\mathbf{AR}}} + \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{\mathbf{RA}}}\right)\Big/_{\mathbf{A}}{}^{S} = 0. \end{cases}
$$

Le (22) sono le equazioni di campo: si tratta di otto equazioni nelle sei incognite Φ_{AB} e $\Phi_{\mathbf{AB}}$. Sussistono però le due identità, che le riducono a sei equazioni indipendenti:

$$
(23)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{AS}} + \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{SA}}\right)\Big/^{\mathbf{R}}{}_{ARS} \equiv 0 \\ \left(\dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{\mathbf{AR}}} + \dfrac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{\mathbf{RA}}}\right)\Big/_{\mathbf{A}}{}^{S}{}_{RS} \equiv 0. \end{cases}
$$

Difatti, essendo:

$$
\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{AS}}\right)\Big/^{\mathbf{R}}{}_{ARS} = \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{AS}}\right)\Big/_{\mathbf{RS}}{}^{\mathbf{R}}{}_{A} = -\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{AS}}\right)\Big/^{\mathbf{R}}{}_{SRA} = -\left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{SA}}\right)\Big/^{\mathbf{R}}{}_{ARS}
$$

la prima delle (23) segue immediatamente. La seconda si dimostra in modo perfettamente analogo.

b) *Lagrangiana dipendente da uno spinore doppio simmetrico, nonché dal suo spinore potenziale e dai rispettivi coniugati.*

Supponiamo che la densità lagrangiana, oltre che dallo spinore Φ_{AB} e dal suo coniugato, dipenda anche esplicitamente dallo spinore potenziale $\chi_{\mathbf{RS}}$ e dal suo coniugato $\bar{\chi}_{\mathbf{RS}}$.

Sia cioè:

$$
(24)\qquad \mathfrak{L} = \mathfrak{L}\,(\Phi_{AB}, \bar{\Phi}_{AB}, \chi_{\mathbf{RS}}, \bar{\chi}_{\mathbf{RS}}).
$$

Per ottenere le equazioni di campo possiamo procedere come nel caso precedente. Si ha ora:

$$
\delta \int_\tau \mathfrak{L}(\Phi_{AB}, \bar{\Phi}_{AB}, \chi_{\mathbf{RS}}, \bar{\chi}_{\mathbf{RS}})\, d\tau =
$$

$$
= \int_\tau \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Phi_{AB}}\, \delta\Phi_{AB} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \bar{\Phi}_{AB}}\, \delta\bar{\Phi}_{AB} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \chi_{\mathbf{RS}}}\, \delta\chi_{\mathbf{RS}} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \bar{\chi}_{\mathbf{RS}}}\, \delta\bar{\chi}_{\mathbf{RS}}\right) d\tau
$$

e, posto $\delta\chi_{\mathbf{RS}} = 0$ e $\delta\bar{\chi}_{\mathbf{RS}} = 0$ al contorno σ di τ, per le (20) e (19) si ottiene:

$$(20') \quad \delta\int_\tau \mathfrak{L} d\tau = -\frac{1}{8}\int_\tau \Big[\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{AS}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{SA}}}\Big)_{/\mathrm{A}}^{\mathbf{R}} + \Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{AR}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{RA}}}\Big)_{/\mathbf{A}}^{\mathrm{S}} + $$
$$- 8\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\chi_{\mathbf{RS}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\bar{\chi}_{\mathbf{SR}}}\Big)\Big] \delta\varphi_{\mathbf{RS}}\, d\tau - \frac{1}{8}\int_\tau \Big[\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{AS}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{SA}}}\Big)_{/\mathrm{A}}^{\mathbf{R}} +$$
$$- \Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{AR}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{RA}}}\Big)_{/\mathbf{A}}^{\mathrm{S}} - 8\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\chi_{\mathbf{RS}}} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\bar{\chi}_{\mathbf{SR}}}\Big)\Big] \delta\psi_{\mathbf{RS}}\, d\tau.$$

Le equazioni di campo diventano quindi:

$$(21') \quad \begin{cases} \Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{AS}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{SA}}}\Big)_{/\mathrm{A}}^{\mathbf{R}} + \Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{AR}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{RA}}}\Big)_{/\mathbf{A}}^{\mathrm{S}} = 8\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\chi_{\mathbf{RS}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\bar{\chi}_{\mathbf{SR}}}\Big) \\ \Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{AS}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{SA}}}\Big)_{/\mathrm{A}}^{\mathbf{R}} - \Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{AR}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{RA}}}\Big)_{/\mathbf{A}}^{\mathrm{S}} = 8\Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\chi_{\mathbf{RS}}} - \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\bar{\chi}_{\mathbf{SR}}}\Big) \end{cases}$$

o ancora:

$$(22') \quad \begin{cases} \Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{AS}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathrm{SA}}}\Big)_{/\mathrm{A}}^{\mathbf{R}} = 8\,\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\chi_{\mathbf{RS}}} \\ \Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{AR}}} + \frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\Phi_{\mathbf{RA}}}\Big)_{/\mathbf{A}}^{\mathrm{S}} = 8\,\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\bar{\chi}_{\mathbf{SR}}}\,. \end{cases}$$

Ricordando le identità (23), si deduce che devono essere verificate le relazioni:

$$(23') \quad \begin{cases} \Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\chi_{\mathbf{RS}}}\Big)_{/\mathbf{RS}} = 0 \\ \Big(\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\bar{\chi}_{\mathbf{SR}}}\Big)_{/\mathbf{RS}} = 0. \end{cases}$$

Se, come di consueto, si impone la solenoidalità dei due potenziali (7) $\chi_{\mathbf{RS}}$ e $\bar{\chi}_{\mathbf{RS}}$, le (23′) sono due condizioni che vincolano la lagrangiana. In particolare esse sono senz'altro verificate allorché $\mathfrak{L}$ è funzione quadratica dei suoi argomenti.

Se invece si lasciano liberi i potenziali dalla condizione di solenoidalità, le (23′) possono assumersi come condizioni da imporre ai potenziali stessi in luogo di quelle di solenoidalità.

Ciò avviene, del resto, anche per i campi bivettoriali, cioè per i campi caratterizzati da un tensore doppio emisimmetrico ed individuati da due potenziali vettori. Quando si deducono le equazioni di campo dal principio variazionale (17), si ottengono, per le derivate della lagrangiana rispetto ai potenziali vettori, condizioni perfettamente analoghe alle (23′) (8).

(7) Non si è imposta a priori la condizione di solenoidalità dei potenziali, assumendo la (13) in luogo della (10), per lasciarne arbitrarie le variazioni.

(8) Cfr. E. UDESCHINI BRINIS, loco citato.