Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Olga A. Oleĭnik

Alcuni risultati sulle equazioni lineari e quasi lineari ellittico-paraboliche a derivate parziali del secondo ordine

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.5, p. 775–784.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_5_775_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1966.

Analisi matematica. — *Alcuni risultati sulle equazioni lineari e quasi lineari ellittico–paraboliche a derivate parziali del secondo ordine.* Nota di OLGA A. OLEINIK, presentata (*) dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — Existence, uniqueness and smoothness of weak solutions of a boundary value problem for linear elliptic–parabolic equations are considered. Existence and uniqueness theorems for the Cauchy problem and the first boundary value problem for linear and quasilinear degenerate parabolic equations are proved.

Le equazioni alle derivate parziali del second'ordine lineari e quasi lineari di tipo ellittico–parabolico si presentano in molti problemi di Meccanica, nella teoria dello strato–limite, nel calcolo delle probabilità (per lo studio dei processi di Markov) ed in altre applicazioni ancora.

Le equazioni ellittico–paraboliche sono definite dall'avere la corrispondente forma quadratica caratteristica semidefinita positiva. Alcune forme speciali di tali equazioni furono considerate da F. Tricomi nella sua ben nota Memoria [1] sulle equazioni di tipo misto, nel lavoro [2] di A. Weinstein, nel lavoro [3] di M. Keldysh ed anche in diversi lavori di altri matematici.

G. Fichera [4], [5] ha per primo considerato le equazioni ellittico–paraboliche lineari sotto forma generale. Per tali equazioni egli ha posto problemi al contorno che possono considerarsi come l'estensione ad esse dei problemi di Dirichlet e di Neumann per le equazioni ellittiche.

Allo scopo di formulare il problema di valori al contorno posto da G. Fichera, dobbiamo introdurre alcune notazioni. Sia A un campo limitato nello spazio $R_m(x_1, \cdots, x_m)$ e sia Σ la sua frontiera, che supponiamo dotata di normale. Sia, allora, $n = (n_1, \cdots, n_m)$ la normale interna a Σ. Consideriamo l'operatore differenziale:

$$L(u) \equiv a^{ij} u_{x_i x_j} + b^i u_{x_i} + cu$$

e supponiamo che le funzioni reali a^{ij}, b^i, c siano definite in un campo $\mathfrak{D}$ contenente $\bar{A}$ (chiusura di A). Per ogni x di $\mathfrak{D}$, quali si siano le variabili reali $\xi_1, \cdots, \xi_m$, riesca $a^{ij}(x)\, \xi_i \xi_j \geq 0$. Indichiamo con Σ^0 il sottoinsieme di Σ dove $a^{ij} n_i n_j = 0$. Se Σ^0 non è vuoto, consideriamo in esso la funzione:

$$b = (b^i - a^{ij}_{x_j})\, n_i .$$

Siano $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$ i tre sottoinsiemi di Σ^0 rispettivamente definiti dal verificarsi su ciascuno di essi delle seguenti condizioni:

$$\Sigma_0 : \ b = 0 \quad ; \quad \Sigma_1 : \ b > 0 \quad ; \quad \Sigma_2 : \ b < 0 .$$

Sia $\Sigma_3 = \Sigma - \Sigma^0$.

(*) Nella seduta del 14 maggio 1966.

Il problema al contorno che estende all'operatore $L(u)$ il problema di Dirichlet è il seguente: trovare una funzione $u(x)$ che soddisfa in A l'equazione differenziale

$$L(u) = f \tag{1}$$

e la condizione al contorno

$$u = g \quad \text{su} \quad \Sigma_3 \cup \Sigma_2 \tag{2}$$

essendo f e g funzioni assegnate.

Nei citati lavori di Fichera vengono ottenute, in opportune ipotesi per i coefficienti, le maggiorazioni nella norma $\mathfrak{L}_p$ per le soluzioni in senso classico del problema al contorno (1), (2). Da tali maggiorazioni viene dedotto un principio di massimo, nonché teoremi di unicità per la soluzione in senso classico di detto problema.

Usando un metodo di analisi funzionale, Fichera ha dimostrato l'esistenza di una soluzione debole per le equazioni (1), (2). Egli ha quindi posto il problema consistente nel provare l'unicità di siffatta soluzione. Risposta affermativa a tale quesito è stata data nei lavori [6], [7], [9].

Nelle righe che seguono esporrò alcuni risultati da me ottenuti, relativi alle equazioni ellittico–paraboliche, riguardanti l'esistenza e l'unicità di soluzioni deboli, nonché la regolarizzazione di tali soluzioni deboli. Considererò anche una classe speciale di equazioni ellittico–paraboliche che sembra naturale chiamare *equazioni paraboliche degeneri*. Verrò ad occuparmi, per quanto concerne le equazioni di questo tipo, sia del caso lineare che di quello quasi lineare.

1. EQUAZIONI LINEARI ELLITTICO–PARABOLICHE. – Supporremo che nel campo $\mathfrak{D}$ contenente $\bar{A}$ si abbia $a^{ij} \in C^{(2+\alpha)}$, $b^i \in C^{(1+\alpha)}$, $c \in C^{(\alpha)}$, $0 < \alpha < 1$ e sia $A \in A^{(2+\alpha)}$ (stiamo qui usando le notazioni introdotte nella monografia [8] di C. Miranda).

Sia:

$$L^*(u) \equiv a^{ij} u_{x_i x_j} + b^{*i} u_{x_i} + c^* u ,$$

essendo $b^{*i} = 2a^{ij}_{x_j} - b^i$, $c^* = a^{ij}_{x_i x_j} - b^i_{x_i} + c$.

Indichiamo con Γ la frontiera dell'insieme $\Sigma_0 \cup \Sigma_2$ considerato come sottoinsieme dello spazio ambiente Σ.

Definizione. – La funzione $u(x)$, limitata e misurabile in A, dicesi una *soluzione debole* del problema (1), (2) se, per ogni funzione $v \in C^{(2)}(\bar{A})$, nulla su $\Sigma_1 \cup \Sigma_3$, riesce:

$$\int_A u\, L^*(v)\, dx = \int_A vf\, dx - \int_{\Sigma_3} g \frac{\partial v}{\partial \nu}\, d\sigma + \int_{\Sigma_2} bgv\, d\sigma \tag{3}$$

ove $\dfrac{\partial}{\partial \nu} \equiv a^{ij} \cos(n, x_j) \dfrac{\partial}{\partial x_i}$ e $d\sigma$ è la misura dell'elemento di ipersuperficie su Σ.

Analogamente può darsi la definizione di soluzione debole nello spazio $\mathfrak{L}_p(A)$ ($p \geq 1$) per il problema (1), (2). In tal caso basta solo supporre che la $u(x)$, verificante le (3), appartenga ad $\mathfrak{L}_p$ (A).

TEOREMA 1. – *Sia per ogni x: $c(x) \leq c_0 < 0$ con c_0 costante e sia f una funzione limitata e misurabile in* A *e g limitata e misurabile su $\Sigma_2 \cup \Sigma_3$; Γ abbia misura nulla su Σ. Esiste allora una soluzione debole del problema* (1), (2) *per la quale sussiste la diseguaglianza* (principio di massimo):

$$|u| \leq \max\left\{\sup \frac{|f|}{c_0}, \ \sup|g|\right\}.$$

TEOREMA 2. – *Fissato $p > 1$, riesca in* A: $c - \frac{1}{p} b^i_{x_i} + \frac{1}{p} a^{ij}_{x_i x_j} < 0$ *e sia $f \in \mathfrak{L}_p(A)$ e $g = 0$ su $\Sigma_2 \cup \Sigma_3$; Γ abbia misura nulla su Σ. Esiste allora una soluzione debole del problema* (1), (2) *appartenente ad $\mathfrak{L}_p$* (A).

Le soluzioni del problema (1), (2) – l'esistenza delle quali abbiamo asserita nei teoremi 1 e 2 – possono essere ottenute, quando f e g sono abbastanza regolari, come limiti, per $\varepsilon \to 0$, delle soluzioni del problema di Dirichlet per le equazioni ellittiche

$$\varepsilon \Delta u + L(u) = f, \qquad (\varepsilon > 0), \text{ in A}$$

con la condizione al contorno:

$$u = g_1 \qquad \text{su } \Sigma$$

ove $g_1 = g$ su $\Sigma_2 \cup \Sigma_3$.

Se f e g sono arbitrarie funzioni misurabili e limitate nei rispettivi insiemi di definizione, allora si approssimano f e g con successioni f_n e g_n di funzioni convenientemente regolari e successivamente, indicata con u_n la soluzione del problema (1), (2) corrispondente ai dati f_n e g_n, la u si ottiene come limite debole della successione u_n, per $n \to \infty$.

Risultati relativi all'esistenza di soluzioni deboli, analoghi a quelli contenuti nei teoremi 1 e 2, erano stati ottenuti con differente procedimento da Fichera nei lavori [4] e [5].

Supponiamo che – considerando Σ come spazio ambiente – i punti della frontiera di Σ_3 (su Σ) siano punti limiti di punti interni a Σ^0.

Sia Γ' un sottoinsieme di Γ. Diremo che Γ' verifica la *ipotesi* γ) se, preso comunque un punto $x^0 \in \Gamma'$ esiste un intorno I_{x^0} di x^0 su R_m tale che possa introdursi in I_{x^0} un sistema di coordinate curvilinee di classe $C^{(2)}, y_1, \cdots, y_m$, tale che: I) $\Sigma \cap I_{x^0}$ sia l'insieme dei punti di I_{x^0} per i quali $y_m = 0$; II) l'insieme $\Gamma \cap I_{x^0}$ sia l'insieme di tutti i punti di I_{x^0} per i quali $y_{m-1} = 0$, $y_m = 0$.

Sussistono i seguenti teoremi concernenti l'unicità delle soluzioni deboli per il problema (1), (2).

TEOREMA 3. – *Sia $c^*(x) \leq c_1 < 0$ con c_1 costante; la frontiera di Σ_3 (su Σ) verifichi l'ipotesi sopra enunciata e Γ verifichi l'ipotesi γ). Allora la soluzione debole del problema* (1), (2) *è unica nella classe $\mathfrak{L}_p$* (A) *con $p \geq 3$*.

Sussiste anche un teorema di unicità per la soluzione debole del problema al contorno (1), (2) nella classe $\mathfrak{L}_p(A)$ con $p \geq 2$ sotto condizioni alquanto più restrittive su Γ.

TEOREMA 4. – *Verifichino* c^* *e* Σ_3 *le stesse ipotesi del teorema precedente. L'insieme* Γ *sia decomponibile in tre sottoinsiemi* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ (*qualcuno dei quali eventualmente vuoto*) *tali che*: I) Γ_1 *verifichi l'ipotesi* γ) *ed inoltre esista un aperto* A_1 *contenente* Γ_1 *tale che sia* $u \in \mathfrak{L}_3(A \cap A_1)$; II) *detto* Γ_2^δ *l'involucro di raggio* δ *di* Γ_2 *su* Σ *riesca: misura ipersuperficiale di* $\Gamma_2^\delta = O(\delta^2)$; III) Γ_3 *verifichi l'ipotesi* γ) *e, posto* $y_{m-1} = \Phi(x_1, \cdots, x_m)$, *si abbia* $a^{ij}\Phi_{x_i}\Phi_{x_j} = 0$ *in ogni punto di* Γ_3. *In tali ipotesi la soluzione debole del problema* (1), (2) *appartenente ad* $\mathfrak{L}_p(A)$ *con* $p \geq 2$ *è unica.*

Le dimostrazioni complete dei teoremi 1, 2, 3, 4 sono contenute nel lavoro [7]. Alcune di esse si trovano anche in [9].

Desidero osservare che i teoremi di esistenza e di unicità testè enunciati possono essere estesi – usando le stesse tecniche dimostrative – al problema al contorno

$$L(u) = f \quad \text{in} \quad A \tag{4}$$

$$u = g \quad \text{su} \quad \Sigma_2 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial \nu} + \beta u = q \quad \text{su} \quad \Sigma_3 , \tag{5}$$

quando sia verificata la condizione $\overline{\Sigma}_3 \cap \Sigma^0 = 0$ e si facciano le opportune ipotesi su Σ, sui coefficienti dell'equazione (4) e sulle funzioni f, g, β, q.

Anche il problema (4), (5) è stato posto nei lavori [4] e [5] e può considerarsi come un'estensione all'operatore ellittico–parabolico del classico secondo problema al contorno per un'equazione ellittica.

Riveste interesse considerare per un'equazione ellittico–parabolica il problema al contorno (1), (2) quando la frontiera Σ di A è soltanto regolare a pezzi. Per esempio, nel caso che $L(u)$ sia il classico operatore del calore, il primo problema di valori al contorno ad esso relativo – che ovviamente rientra come caso particolare nel problema (1), (2) – viene, in genere, considerato in un cilindro dello spazio, cioè in un campo la cui frontiera è regolare a pezzi.

Nel lavoro [7] vengono date delle condizioni sufficienti sotto le quali i teoremi 1, 2, 3, 4 possono essere estesi anche a campi con frontiera regolare a pezzi. Ad esempio, per l'esistenza e l'unicità della soluzione debole del problema (1), (2) nella classe delle funzioni misurabili e limitate in domini con frontiera regolare a pezzi, può darsi per Σ una condizione del tipo seguente. Indicato con $\overset{*}{\Sigma}$ l'insieme dei punti singolari di Σ, sia $\overset{*}{\Sigma}$ decomponibile nei due insiemi Σ' e Σ'' (uno dei due eventualmente vuoto) verificanti le seguenti condizioni: detto Σ'_δ l'involucro di raggio δ di Σ' su R_m, riesca *mis* $\Sigma'_\delta = O(\delta^{2+\varrho})$ con $\rho > 0$; l'insieme Σ'' verifichi una ipotesi perfettamente analoga alla ipotesi γ), con la sola differenza che in essa al posto della condizione I) va sostituita la seguente:

$\Sigma \cap I_{x^0}$ sia l'insieme dei punti di I_{x^0} per i quali si abbia $y_m = 0$, $y_{m-1} \geq 0$ oppure $y_{m-1} = 0$, $y_m \geq 0$. Inoltre nella condizione II) della ipotesi γ) si deve leggere $\Sigma'' \cap I_{x^0}$ invece di $\Gamma \cap I_{x^0}$.

Esempi anche semplici provano che, in generale, la soluzione debole del problema (1), (2) può non essere una soluzione regolare. Ad esempio, posto $r^2(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i^2$, la funzione $u(x) = r^\alpha$ è soluzione del problema (1), (2) nel campo sferico $r < 1$ per l'equazione a coefficienti analitici ($\alpha > 0$)

$$r^2 \Delta u - [\alpha m + \alpha(\alpha - 2)] u = 0 \tag{6}$$

con la condizione al contorno $u = 1$ su $\Sigma_3 = \Sigma$.

Se riesce $\alpha - [\alpha] > 0$, la soluzione u ha derivate limitate soltanto fino all'ordine $[\alpha]$. È anche immediato constatare che la soluzione del problema (1), (2) relativo all'equazione $u_{x_i} + cu = 0$ considerata in un campo più volte connesso è in generale discontinua.

Diciamo che la funzione Ψ appartiene alla classe $C_k(A)$ se ha in A derivate deboli limitate fino all'ordine k incluso.

Per investigare la regolarità delle soluzioni deboli del problema (1), (2), riveste notevole importanza il seguente

LEMMA 1. – *Sia $a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0$ per ogni $x \in R_m$ e sia $a^{ij} \in C_2(R_m)$. Riesce per ogni $v \in C_2(R_m)$ e qualunque sia* ρ

$$(a^{ij}_{x_\rho} v_{x_i x_j})^2 \leq M a^{ij} v_{x_i x_s} v_{x_j x_s} \tag{7}$$

dove M *è una costante positiva che dipende unicamente dal massimo modulo delle derivate seconde delle funzioni a^{ij}.*

Poniamo:

$$B_s = c + \frac{1}{4} Mm + b^s_{x_s} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{m} |b^i_{x_s}| + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^{m} |b^s_{x_i}|, \qquad s = 1, \cdots, m.$$

ove M è la costante che interviene nella (7). Sia inoltre E il sottoinsieme di $\bar{A}$ ove $\det\{a^{ij}\} = 0$.

TEOREMA 5. – *Siano verificate le condizioni del teorema 3 e sia inoltre $c(x) \leq c_0 < 0$. I due insiemi $\Sigma_3 \cup \Sigma_2$ e $\Sigma_1 \cup \Sigma_0$ siano chiusi. Sia $f \in C_1(A)$ e $g \equiv 0$ su $\Sigma_2 \cup \Sigma_3$, Riesca infine in ogni punto di* E:

$$B_s < 0, \qquad s = 1, \cdots, m. \tag{8}$$

Allora la soluzione debole limitata del problema (1), (2) *appartiene a* $C_1(A)$.

L'esempio relativo all'equazione (6) prova che non si può prescindere, per avere la regolarità delle soluzioni, da condizioni quali quelle espresse dalle (8).

Il teorema 5 può generalizzarsi e possono darsi le condizioni per i coefficienti di L (u), per Σ e per i dati sotto i quali la soluzione u appartiene a $C_k(A)$. La dimostrazione del teor. 5, come pure le indicate generalizzazioni, si trovano nei lavori [7], [10].

Come casi particolari dei teoremi generali di regolarizzazione dati nei lavori ora citati, possono ottenersi condizioni abbastanza semplici per l'appartenenza di $u(x)$ a $C_k(A)$. Esse impongono ai coefficienti di $L(u)$ e ad f di appartenere a $C_k(A)$ (g si assume $\equiv 0$), e suppongono che sia in $\bar{A}$: $c(x) < 0$ e $|c(x)|$ maggiore di una certa costante (data esplicitamente in [7] e [10]) dipendente da m, k, dalle derivate prime delle funzioni b^i e dalle derivate seconde delle a^{ij}. Inoltre le condizioni su Σ consistono nel supporre che Σ_3, Σ_2 e $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ siano insiemi chiusi.

Alcuni teoremi riguardanti l'esistenza di soluzioni regolari del problema al contorno (1), (2) sono stati dati anche nel lavoro [11] di J. Kohn e L. Nirenberg.

2. EQUAZIONI PARABOLICHE DEGENERI LINEARI E QUASI LINEARI. – Consideriamo l'equazione

$$L(u) - u_t \equiv a^{ij}(t, x)\, u_{x_i x_j} + b^i(t, x)\, u_{x_i} + c(t, x)\, u - u_t = f(t, x) \tag{9}$$

con la condizione $a^{ij}(t, x)\, \xi_i \xi_j \geq 0$.

Chiameremo siffatta equazione un'*equazione parabolica degenere*.

I teoremi di esistenza ed unicità di soluzioni deboli limitate per il problema di Cauchy relativo all'equazione (9) nel dominio $H = (0, T) \times R_m$ con la condizione iniziale

$$u|_{t=0} = u^0(x) \tag{10}$$

sono stati dimostrati nel lavoro [9].

Sia A il campo di R_m dianzi introdotto. Considereremo per l'equazione (9) l'analogo del problema al contorno (1), (2) relativamente al cilindro $Q = (0, T) \times A$. Nelle righe che seguono dimostreremo l'esistenza e l'unicità di soluzioni regolari sia per il problema di Cauchy che per il testè menzionato problema in Q. Esamineremo anche il caso che le funzioni a^{ij}, b^i, c, ed f dipendano oltre che da t e x, anche da u.

Detto k un intero non negativo, indicheremo con E_k la classe delle funzioni $\Psi(t, x, u)$ definite in $H \times (-M_0, M_0)$ (essendo M_0 un qualsiasi numero positivo) ciascuna delle quali possiede tutte le derivate parziali deboli limitate della forma:

$$\frac{\partial^l \Psi}{\partial t^{l_0}\, \partial x_1^{l_1} \cdots \partial x_m^{l_m}\, \partial u^{l_{m+1}}} \tag{11}$$

con $2 l_0 + l_1 + \cdots + l_m + l_{m+1} \leq k$.

TEOREMA 6. – *I coefficienti* $a^{ij}(t, x)$, $b^i(t, x)$, $c(t, x)$ *e la funzione* $f(t, x)$ *appartengono in* H *alla classe* E_k (*con* $k \geq 2$). *La* $u^0(x)$ *appartenga alla classe* $C_k(R_m)$. *Allora esiste una soluzione* $u(t, x)$ *del problema di Cauchy* (9), (10) *appartenente alla classe* E_k *in* H.

Per la dimostrazione di questo teorema considereremo il problema di Cauchy per l'equazione parabolica:

$$\varepsilon \Delta u + L_\varepsilon(u) - u_t = f_\varepsilon \quad , \quad \varepsilon > 0 , \tag{12}$$

con la condizione iniziale:

$$u\,|_{t=0} = u^0_\varepsilon. \tag{13}$$

Essendo $L_\varepsilon(u) \equiv a^{ij}_\varepsilon u_{x_i x_j} + b^i_\varepsilon u_{x_i} + c_\varepsilon u$ e convenendo di indicare con Ψ_ε la *media di raggio* ε di una data funzione Ψ, media ottenuta con un nucleo regolarizzante di classe $C^{(\infty)}$ (vedi [12] p. 13).

In base a ben noti teoremi per le equazioni paraboliche, la soluzione limitata del problema di Cauchy (12), (13) esiste ed è una funzione di classe $C^{(\infty)}$.

Dalla (12), derivando i due membri rispetto ad x_l, moltiplicandoli per $2\,u_{x_l}$ e sommando su l, si ottiene una relazione dalla quale – usando il lemma 1 – si deduce la diseguaglianza:

$$\varepsilon\Delta P^1 + a^{ij}_\varepsilon P^1_{x_i x_j} + b^i_\varepsilon P^1_{x_i} - P^1_t + M^1 P^1 \geq -K^1, \tag{14}$$

essendo $P^1 = \sum\limits_{l=1}^{m} u^2_{x_l}$ ed M^1 e K^1 costanti positive che non dipendono da ε.

Posto $\tilde{P}^1 = P^1 e^{-(M^1+1)t}$, si ha:

$$\varepsilon\Delta\tilde{P}^1 + a^{ij}_\varepsilon \tilde{P}^1_{x_i x_j} + b^i_\varepsilon \tilde{P}^1_{x_i} - \tilde{P}^1_t - \tilde{P}^1 \geq -K^1.$$

Pertanto, per il principio di massimo,

$$\tilde{P}^1 \leq \max\{K^1, \sup P^1|_{t=0}\}.$$

Ne segue che P^1 è limitata da una costante che non dipende da ε.

Supposto di avere esteso questo risultato alla somma dei quadrati delle derivate di u di ordine $s-1$, rispetto a tutte le x_i, somma che indicheremo con P^{s-1}, si può, con analogo procedimento, ottenere lo stesso risultato per P^s $(s \leq k)$. Le derivate di u del tipo della (11), con $l_0 > 0$, $(l_{m+1} = 0)$, possono maggiorarsi usando la (12) e le equazioni che da questa si ottengono derivando i due membri. Da ciò la tesi del teorema.

Consideriamo ora il problema di Cauchy per l'equazione parabolica degenere quasi lineare che scriveremo al modo seguente:

$$a^{ij}(t,x,u)\,u_{x_i x_j} + b^i(t,x,u)\,u_{x_i} - u_t + c_1(t,x,u)\,u = f_1(t,x). \tag{15}$$

Supporremo che in H per ogni valore di u si abbia $a^{ij}(t,x,u)\,\xi_i\,\xi_j \geq 0$, $c_1(t,x,u) < \bar{c}$, essendo $\bar{c}$ una costante positiva.

Se esiste in H la soluzione limitata del problema di Cauchy (15), (10), in base al principio di massimo avremo in H:

$$|u| \leq \max\{\sup|f_1|, \sup|u^0(x)|\}\,e^{(\bar{c}+1)T} \equiv M_0.$$

TEOREMA 7. – *Supponiamo che in* $H \times (-M_0, M_0)$ *le funzioni* $a^{ij}(t,x,u)$, $b^i(t,x,u)$, $c_1(t,x,u)$, $f_1(t,x)$ *appartengano alla classe* E_k $(k \geq 2)$ *e che* $u^0(x)$ *appartenga a* $C_k(R_m)$. *Esiste allora una soluzione* $u(t,x)$ *del problema di Cauchy* (15), (10) *che appartiene alla classe* E_k *in* $(0, t_0) \times R_m$, *essendo* t_0 *un numero positivo dipendente dai dati del problema.*

Per rendere più semplice la dimostrazione, supporremo che le funzioni a^{ij}, b^i, c_1, f_1 e u^0 appartengano a E_{k+3}. Se tale ipotesi non fosse verificata, si perverrebbe ugualmente alla dimostrazione del teorema mediante la considerazione delle *funzioni medie* $a^{ij}_\varepsilon, b^i_\varepsilon, c_{1\varepsilon}, f_{1\varepsilon}, u^0_\varepsilon$ già usate nella dimostrazione del teor. 6.

Poniamo in H: $u_0 = u^0(x)$ e, supposto di aver definito la funzione u_{n-1}, sia u_n la soluzione del seguente problema lineare di Cauchy

$$(16) \qquad a^{ij}(t, x, u_{n-1}) \frac{\partial^2 u_n}{\partial x_i \partial x_j} + b^i(t, x, u_{n-1}) \frac{\partial u_n}{\partial x_i} + $$

$$+ c_1(t, x, u_{n-1}) u_n - \frac{\partial u_n}{\partial t} = f_1(t, x),$$

$$(17) \qquad u_n(0, x) = u^0(x).$$

Le funzioni u_n – per il principio di massimo – verificano la diseguaglianza $|u_n| \leq M_0$.

In virtù del teor. 6 la soluzione u_n di (16), (17) esiste ed appartiene a $E_{k+3}(H)$.

Introduciamo, relativamente alla u_n, l'analoga della funzione P^s, considerata nella dimostrazione del teor. 6. Sia essa $P^{n,s}$. Per siffatta funzione si può ottenere una diseguaglianza analoga alla (14)

$$(18) \qquad a^{ij} P^{n,s}_{x_i x_j} + b^i P^{n,s}_{x_i} - P^{n,s}_t + M^{n,s} P^{n,s} \geq - K^{n,s}$$

dove $M^{n,s}$ è una costante che dipende dalle derivate spaziali (cioè rispetto alle variabili $x_1, \cdots, x_m$), fino all'ordine s incluso, di u_{n-1} e dalle derivate seconde di u_{n-1}; $K^{n,s}$ è una costante che dipende dalle derivate spaziali di u_n e u_{n-1} fino all'ordine $s - 1$, $1 \leq s \leq k$.

Usando la diseguaglianza (18) non è difficile mostrare l'esistenza di una costante N^k e di un numero positivo t_0, entrambi indipendenti da n, tali che, se riesce $P^{l,s} \leq N^k$ $(1 \leq s \leq k)$ per $l \leq n - 1$ e per $0 \leq t \leq t_0$, allora riesce: $P^{n,s} \leq N^k$ $(1 \leq s \leq k)$ per $0 \leq t \leq t_0$.

Usando del fatto che le derivate prime e seconde di u_n sono uniformemente limitate rispetto ad n ed il principio di massimo applicato all'equazione cui soddisfa $u_n - u_{n-1}$, possiamo facilmente provare l'uniforme convergenza di u_n in $H_0 = (0, t_0) \times R_m$. È evidente che la funzione limite $u(t, x)$ appartiene ad E_k in H_0 e soddisfa l'equazione (15) e la condizione iniziale (10).

Consideriamo l'analogo del problema (1), (2) per le equazioni (9) e (15) nel cilindro Q, problema che chiameremo *primo problema di valori al contorno* per le equazioni paraboliche degeneri.

Consideriamo dapprima il caso lineare. Sia $S \equiv [0, T] \times \Sigma$. Diciamo S_3 il sottoinsieme di S dove $a^{ij}(t, x) n_i n_j \neq 0$ e S_2 il sottoinsieme dove $a^{ij}(t, x) n_i n_j = 0$ e $b = (b^i - a^{ij}_{x_j}) n_i < 0$.

TEOREMA 8. – *Supponiamo che* S_3 *ed* S_2 *siano insiemi chiusi. Supponiamo che i coefficienti dell'equazione* (9) *e la funzione* f *appartengano alla* *classe* $E_k(Q)$ *e* $u^0(x) \in C_k(A)$*; inoltre* f *e* u^0 *verifichino le condizioni di compatibilità su* $\Sigma_2 \cup \Sigma_3$. *Sia infine* $A \in A^{(k+1)}$, $k \geq 2$. *Esiste una sola soluzione* $u(t, x)$ *dell'equazione* (9) *in* Q, *appartenente ad* $E_k(Q)$ *e verificante le condizioni:*

$$u|_{t=0} = u^0(x) \quad , \quad u|_{S_3 \cup S_2} = 0 .$$

Questo teorema può esser provato con lo stesso procedimento usato per provare il teor. 9 del lavoro [7].

Per quanto concerne il caso dell'equazione quasi lineare (15), sussiste il seguente teorema.

TEOREMA 9. – *Supponiamo che riesca* $S = S' \cup S''$, *essendo* S' *ed* S'' *due sottoinsiemi chiusi di* S *verificanti le seguenti condizioni*: I) *esiste una funzione* $g(t, x)$ *definita in* Q *per la quale in ogni punto di* S' *si abbia* $a^{ij}(t, x, g(t, x)) n_i n_j > 0$; II) *per ogni funzione* $v(t, x)$ *di classe* $C^{(1)}$ *in* $\bar{Q}$ *si ha, in tutti i punti di* S'':

$$a^{ij}(t, x, v(t, x)) n_i n_j = 0 \quad , \quad \left[b^i - \frac{\partial}{\partial x_j} a^{ij}(t, x, v(t, x))\right] n_i \geq 0 .$$

Supponiamo che i coefficienti della (15) *e la funzione* f_1 *appartengano alla classe* E_k *in* G, *che* $u^0(x)$ *appartenga a* $C_k(A)$, g *appartenga ad* $E_{k+2}(Q)$; f_1, g *e* u^0 *verifichino le condizioni di compatibilità su* S' *per* $t = 0$. *Sia infine* $A \in A^{(k+1)}$; $G = Q \times [-M_1, M_1]$, $M_1 = \max\{M_0, \max|g| e^{(c+1)T}\}$.

In tali ipotesi è possibile determinare un numero positivo t_0 *dipendente dai dati del problema, tale che, posto* $Q_0 = (0, t_0) \times A$, *esiste una sola soluzione dell'equazione* (15) *in* Q_0, *appartenente ad* E_k $(k \geq 2)$ *e verificante le condizioni*

$$u|_{t=0} = u^0(x) \quad , \quad u|_{S'} = g .$$

Il teorema 9 può essere provato con metodo analogo a quello del teor. 7, fondandosi sui risultati del teor. 8.

Sarebbe interessante trovare condizioni sufficienti abbastanza ampie, sotto le quali il problema di Cauchy ed il primo problema di valori al contorno per l'equazione (15) abbiano soluzione *in grande*, cioè per un fissato intervallo $(0, T)$ di variabilità della t.

Desideriamo osservare che nel caso delle equazioni paraboliche quasi lineari (non degeneri) questi problemi sono stati risolti solo recentemente, facendo uso di ben noti risultati di E. de Giorgi [13] e J. Nash [14] relativi alle maggiorazioni « a priori » per le equazioni ellittiche e paraboliche. Si veda a tal proposito il lavoro [15].

BIBLIOGRAFIA.

[1] F. TRICOMI, *Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di secondo ordine di tipo misto*, « Atti Acc. Naz. Lincei », ser. 5ª, *14*, 134–247 (1923).

[2] A. WEINSTEIN, *Generalized Axially Symmetric Potential Theory*, « Bull. Amer. Math. Soc. », *59*, 20–38 (1953).

[3] M.V. KELDYSH, *Su alcuni casi di degenerazione delle equazioni ellittiche sul contorno* (in russo), « Doklady Acad. Nauk SSSR », *77*, n. 2, 181–183 (1951).

[4] G. FICHERA, *Sulle equazioni differenziali lineari ellittico–paraboliche del secondo ordine*, «Atti Acc. Naz. Lincei, Memorie», ser. VIII, *5*, sez. I.1., 1–30 (1956).
[5] G. FICHERA, *On a unified theory of boundary value problems for elliptic–parabolic equation of second order*, in *Boundary problems in differential equations*, Madison (1960), pp. 97–120; Russian translation «Matematica», *7*, 6 (1963).
[6] O. A. OLEINIK, *Sul problema di Fichera* (in russo), «Doklady Acad. Nauk SSSR», *157*, n. 6, 1297–1300 (1964).
[7] O. A. OLEINIK, *Sulle equazioni lineari del secondo ordine con forma caratteristica non negativa* (in russo), «Matem. Sbornik», *69*, n. 1, 111–140 (1966).
[8] C. MIRANDA, *Equazioni alle derivate parziali di tipo ellittico*, Berlin, Springer (1955).
[9] O. A. OLEINIK, *A boundary value problem for linear elliptic–parabolic equations*, Lectures series, n. 46, Inst. for Fluid Dynamics and Applied Mathem., Univ. of Maryland (1965).
[10] O. A. OLEINIK, *Sulla regolarità delle soluzioni delle equazioni degeneri ellittiche e paraboliche* (in russo), «Doklady Acad. Nauk SSSR», *163*, n. 3, 577–580 (1965).
[11] J. J. KOHN, L. NIRENBERG, *Non–coercive Boundary Value Problems*, «Comm. on Pure and Appl. Mathem.», *18*, n. 3 (August) 443–492 (1965).
[12] S. SOBOLEV, *Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, «Trans. of Math. Monographs», *7*, Amer. Math. Society, Providence, R.I. (1963).
[13] E. DE GIORGI, *Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari*, «Mem. Acc. Sci., Torino», ser. 3ª, *3°*, parte I, 25–43 (1957).
[14] J. NASH, *Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations*, «Amer. Journ. Math.», *80*, n. 4, 931–954 (1958).
[15] O. A. OLEINIK, *Quasi–linear second–order parabolic equations with many independent variables*, Seminari dell'Istituto Naz. Alta Matematica, 1962–63, Roma, Ediz. Cremonese, vol. I, 335–354.