

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

# RENDICONTI

---

ROMULUS CRISTESCU

## Integrali vettoriali su uno spazio localmente compatto

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 40 (1966), n.5, p. 792–795.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1966\\_8\\_40\\_5\\_792\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_5_792_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Analisi funzionale.** — *Integrali vettoriali su uno spazio localmente compatto.* Nota di ROMULUS CRISTESCU, presentata (\*) dal Socio M. PICONE.

SUMMARY. — In this note, a type of vectorial integral on a locally compact space is defined with respect to measures whose values are operators and the general form of certain linear operators is established.

In questa Nota sarà definito un tipo di integrale vettoriale su uno spazio localmente compatto, rispetto a misure i cui valori sono operatori. Si considera lo spazio  $C_0(T, \mathfrak{X})$  delle funzioni continue a supporto compatto, definite su uno spazio  $T$  localmente compatto, a valori in uno spazio di Banach reticolato  $\mathfrak{X}$ . Si stabilisce la forma generale di certi operatori lineari definiti su  $C_0(T, \mathfrak{X})$  a valori in uno spazio lineare completamente reticolato (1).

1. INTEGRALI VETTORIALI. — Siano  $\mathfrak{X}$  uno spazio di Banach reticolato e  $\mathfrak{Y}$  uno spazio lineare completamente reticolato. Si indicherà con  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$  l'insieme degli operatori regolari (2) che applicano  $\mathfrak{X}$  in  $\mathfrak{Y}$ , e con  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})^{no}$  l'insieme degli operatori lineari (no)-continui, cioè  $U \in (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})^{no}$  se  $U$  è lineare e se da  $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  (nella topologia data dalla norma di  $\mathfrak{X}$  risulta  $U(x) = (o) - \lim_{n \rightarrow \infty} U(x_n)$  (con la lettera  $o$  indicandosi la convergenza nel senso dell'ordine).

Siano  $T$  uno spazio di Hausdorff localmente compatto e  $\mathfrak{B}$  l'insieme di tutti i sottoinsiemi boreliani relativamente compatti di  $T$ . Una funzione  $m$  che applica  $\mathfrak{B}$  in  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$ , sarà chiamata una *misura boreliana* su  $T$ , se per ogni successione  $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di insiemi di  $\mathfrak{B}$  a due a due disgiunti, la cui riunione appartiene a  $\mathfrak{B}$  si ha

$$m\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = (o) - \sum_{n=1}^{\infty} m(A_n)$$

nel secondo membro essendo una serie convergente rispetto all'ordine nello spazio  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$ .

Sarà chiamata *misura regolarmente maggiorata*, ogni misura boreliana  $m$ , a valori in  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$ , per la quale esistono una misura reale, positiva e regolare

(\*) Nella seduta del 14 maggio 1966.

(1) La terminologia corrisponde a quella del nostro libro [1] e le notazioni sono pure quelle di [1]. Si dice anche reticolo lineare invece di spazio lineare reticolato; reticolo lineare relativamente completo invece di spazio lineare completamente reticolato; reticolo di Banach invece di spazio di Banach reticolato.

(2) Un operatore si dice regolare se si può rappresentare come differenza di due operatori additivi e positivi.

$\mu$  su  $\mathfrak{B}$ , e un operatore positivo  $W \in (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})^{n_0}$  tali che

$$(1) \quad |m(A)| \leq \mu(A) W$$

per ogni  $A \in \mathfrak{B}$ . In questo caso diremo che  $m$  è *maggiorata* da  $\mu$ . Si può verificare che se  $m$  è maggiorata da  $\mu_1$  e da  $\mu_2$ , allora  $m$  è maggiorata dalla misura  $\mu = \mu_1 \wedge \mu_2$ .

Sia  $L_\mu(T, \mathfrak{X})$  lo spazio delle funzioni definite su  $T$  a valori in  $\mathfrak{X}$ , integrabili rispetto alla misura reale, positiva e regolare  $\mu$ .

Se  $f \in L_\mu(T, \mathfrak{X})$  porremo

$$p_\mu(f) = \int_T |f(t)| d\mu(t).$$

Una funzione  $f$  che applica  $T$  in  $\mathfrak{X}$  sarà chiamata  $\mathfrak{B}$ -semplice se è della forma

$$f(t) = \sum_{i=1}^k \gamma_{A_i}(t) x_i$$

dove  $x_i \in \mathfrak{X}$ ,  $A_i \in \mathfrak{B}$ , e  $\gamma_A$  essendo la funzione caratteristica dell'insieme  $A$ . Per tale funzione l'integrale rispetto alla misura (operatoriale)  $m$  è

$$\int_T f(t) dm(t) = \sum_{i=1}^k m(A_i)(x_i).$$

Dalla (1) risulta

$$(2) \quad \left| \int_T f(t) dm(t) \right| \leq W(p_\mu(f)).$$

Se  $m$  è una misura regolarmente maggiorata, una funzione qualunque  $f$ , che applica  $T$  in  $\mathfrak{X}$  si dirà *integrabile* rispetto a  $m$  se esiste una misura regolare  $\mu$ , tale che  $m$  sia maggiorata da  $\mu$ , e che  $f \in L_\mu(T, \mathfrak{X})$ . Dunque esiste una successione  $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  di funzioni  $\mathfrak{B}$ -semplici, convergente a  $f$  quasi d'appertutto rispetto a  $\mu$ , e che sia una successione di Cauchy rispetto alla convergenza in media.

In questo caso porremo

$$(3) \quad \int_T f(t) dm(t) = (o)\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_T f_n(t) dm(t)$$

nel secondo membro essendo il limite rispetto all'ordine.

L'esistenza del limite risulta dalla disuguaglianza <sup>(3)</sup>

$$\left| \int_T f_j(t) dm(t) - \int_T f_k(t) dm(t) \right| \leq W(p_\mu(f_j - f)) + W(p_\mu(f - f_k)).$$

(3) Cfr. anche [1] p. 72, teor. 3.2.4.

Con una osservazione precedente sulle misure regolarmente maggiorate, si verifica facilmente anche l'unicità del limite.

Osserviamo che la disuguaglianza (2) resta valevole per ogni funzione  $f$  integrabile rispetto a  $m$ .

2. LA RAPPRESENTAZIONE DI ALCUNI OPERATORI LINEARI. - Sia  $C_0(T, \mathfrak{X})$  lo spazio delle funzioni definite su  $T$ , a valori in  $\mathfrak{X}$ , continue rispetto alla topologia data dalla norma di  $\mathfrak{X}$ , e a supporto compatto.

Un operatore lineare  $U$  che applica  $C_0(T, \mathfrak{X})$  in  $\mathfrak{Y}$  sarà chiamato un *operatore del tipo (R)*, se esistono una misura reale, positiva, regolare  $\mu$  su  $\mathfrak{B}$  e un operatore positivo  $W \in (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})^{no}$  tali che

$$(4) \quad |U(f)| \leq W(\rho_\mu(f))$$

qualunque sia  $f \in C_0(T, \mathfrak{X})$ .

Se  $m$  è una misura regolarmente maggiorata e se poniamo

$$(5) \quad U(f) = \int_T f(t) dm(t), \quad (f \in C_0(T, \mathfrak{X}))$$

allora  $U$  è un operatore del tipo (R).

Dimostriamo la reciproca.

Sia  $U$  un operatore del tipo (R) sullo spazio  $C_0(T, \mathfrak{X})$ . Supporremo dunque verificata la condizione (4). Indicando con  $\tau$  la topologia della convergenza in media sullo spazio  $L_\mu(T, \mathfrak{X})$ , l'operatore  $U$  è  $(\tau o)$ -continuo su  $C_0(T, \mathfrak{X})$ , cioè dalla  $f = (\tau)\text{-lim}_{n \rightarrow \infty} f_n$  risulta  $U(f) = (o)\text{-lim}_{n \rightarrow \infty} U(f_n)$ .

Lo spazio  $C_0(T, \mathfrak{X})$  essendo ovunque denso in  $L_\mu(T, \mathfrak{X})$  rispetto alla topologia della convergenza in media, l'operatore  $U$  può essere prolungato unicamente sullo spazio  $L_\mu(T, \mathfrak{X})$  conservando la linearità e la disuguaglianza (4).

Per ogni insieme  $A \in \mathfrak{B}$  e ogni elemento  $x \in \mathfrak{X}$  poniamo

$$(6) \quad m(A)(x) = U(\gamma_A x).$$

dove  $\gamma_A x$  è la funzione  $f(t) \equiv \gamma_A(t)x$ . Non è difficile verificare che  $m(A) \in (\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$  qualunque sia  $A \in \mathfrak{B}$  e che vale la disuguaglianza (1). La funzione  $m: A \rightarrow m(A)$  che applica  $\mathfrak{B}$  in  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$ , è una misura regolarmente maggiorata. Infatti, l'additività finita si verifica facilmente e tenendo conto di (1) resta da dimostrare che se  $B_n \downarrow \emptyset$ , ( $B_n \in \mathfrak{B}$ ), allora  $m(B_n) \xrightarrow{o} 0$  nello spazio  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$ . A tale scopo osserviamo che  $L_\mu(T, \mathfrak{X})$  è uno spazio lineare reticolato rispetto all'ordine puntuale e  $U$  è un operatore regolare (4) su questo spazio. Se  $U$  è positivo, dalla (4) risulta senza difficoltà (5) che  $m(B_n) \xrightarrow{o} 0$  (se  $B_n \downarrow \emptyset$ ).

(4) Cfr. [1], p. 188, teor. 1.2.13.

(5) Cfr. [1], p. 189, prop. 1.2.15.

Se  $U$  non è positivo, la funzione d'insieme  $\bar{m}$  associata a  $|U|$  con la formula analoga a (6), è una misura positiva e  $|m(A)| \leq \bar{m}(A)$ , qualunque sia  $A \in \mathfrak{B}$ . Risulta che anche  $m$  è una misura.

Se poniamo

$$(7) \quad V(f) = \int_T f(t) dm(t), \quad (f \in L_\mu(T, \mathfrak{X}))$$

dalla (2) risulta che  $V$  è un operatore lineare  $(\tau_0)$ -continuo su  $L_\mu(T, \mathfrak{X})$ . Se  $f$  è una funzione  $\mathfrak{B}$ -semplice, si ha evidentemente  $U(f) = V(f)$ . Siccome l'insieme delle funzioni  $\mathfrak{B}$ -semplici è ovunque denso in  $L_\mu(T, \mathfrak{X})$  e  $U$  è  $(\tau_0)$ -continuo, risulta  $U$  identico a  $V$ . In particolare l'operatore  $U$  si rappresenta sullo spazio  $C_0(T, \mathfrak{X})$  sotto forma (5).

La rappresentazione è unica. Infatti, se  $m_1$  e  $m_2$  sono delle misure regolarmente maggiorate, allora anche  $m_1 - m_2$  è una misura regolarmente maggiorata. Basta dunque osservare che se  $V(f) = 0$  qualunque sia  $f \in C_0(T, \mathfrak{X})$  (ove  $V$  è l'integrale (7)), allora  $V(f) = 0$  qualunque sia  $f \in L_\mu(T, \mathfrak{X})$  e di conseguenza  $m(A)(x) = V(\gamma_A x) = 0$  per ogni  $A \in \mathfrak{B}$  e ogni  $x \in \mathfrak{X}$ .

Si ha dunque il seguente

TEOREMA. — Per ogni operatore  $U$  del tipo (R), che applica  $C_0(T, \mathfrak{X})$  in  $\mathfrak{Y}$ , esiste una e una sola misura regolarmente maggiorata, a valori in  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$ , tale che

$$(8)' \quad U(f) = \int_T f(t) dm(t)$$

qualunque sia  $f \in C_0(T, \mathfrak{X})$ .

Viceversa se  $m$  è una misura regolarmente maggiorata a valori in  $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})_r$ , la formula (8) definisce un operatore del tipo (R) sullo spazio  $C_0(T, \mathfrak{X})$ .

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] R. CRISTESCU, *Spații liniare ordonate*, București, Editura Acad. R.P.R., 1959.
- [2] R. CRISTESCU, *Intégrales vectorielles et représentation de certains opérateurs linéaires*, « Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R. », 3 (51), 7-15 (1959).
- [3] R. CRISTESCU, *Integrali vettoriali di Stieltjes ed operatori lineari*, « Rendiconti dell'Accad. Naz. dei Lincei (Cl. Sci. fis., mat., nat.) », ser. VIII, 26, 31-34 (1959).
- [4] N. DINCULEANU, *Teoria măsurii și funcții reale*, București 1965.
- [5] N. DINCULEANU, *Sur la représentation intégrale de certains opérations linéaires*. III, « Proc. Amer. Math. Soc. », 10, 59-68 (1959).