Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Rosanna Villella Bressan

Sugli autoomeomorfismi periodici del cerchio

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.5, p. 796–800.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_5_796_0>

Matematica. — *Sugli autoomeomorfismi periodici del cerchio.* Nota di ROSANNA VILLELLA BRESSAN, presentata (*) dal Corrisp. G. SCORZA DRAGONI.

SUMMARY. — In this paper a recent theorem by Scorza Dragoni is used in order to obtain another proof of a known result concerning the periodic auto-homeomorphisms of a circle with a unique interior fixed point; more precisely it will be proved that in such an auto-homeomorphism the fixed point can be connected with the boundary of the circle by simple open curves the images of which under non identical powers of the auto-homeomorphism have only the fixed point in common.

Se un autoomeomorfismo periodico (1) di un cerchio ammette un solo punto unito e questo è interno al cerchio, il punto unito può essere congiunto al contorno del cerchio mediante curve semplici e aperte che hanno in comune con le loro immagini, nelle diverse potenze non identiche dell'autoomeomorfismo, soltanto il punto unito. La circostanza segue immediatamente dal fatto che allora l'autoomeomorfismo è topologicamente equivalente ad una rotazione del cerchio (2).

La presenza in un tal autoomeomorfismo di una curva che unisca il punto unito al contorno del cerchio e che abbia in comune con la propria immagine nell'autoomeomorfismo soltanto il punto unito si può dedurre anche da un teorema di Scorza Dragoni (3). Ebbene, in questa Nota (4) utilizzeremo il teorema di Scorza Dragoni per far appunto vedere che ad una tal curva si può imporre la condizione ulteriore di avere in comune soltanto il punto unito con le pro-

(*) Nella seduta del 14 maggio 1966.

(1) Un autoomeomorfismo t si dice periodico, e il numero naturale m è il suo periodo, se la trasformazione t^m è identica, mentre $t, t^2, \cdots, t^{m-1}$ sono distinte dall'identità.

(2) Per questa equivalenza si vegga: B. V. KERÉKJÁRTÓ, *Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche*, «Mathematische Annalen», *80*, 36–38 (1919); L. E. BROUWER, *Über die periodischen Transformationen der Kugel*, «Mathematische Annalen», *80*, 39–41 (1919); S. EILENBERG, *Sur les transformations périodiques de la surface de sphère*, «Fundamenta Mathematicae», XXII, 28–41 (1934). E si osservi che gli autori citati seguono veramente la via inversa: dalla presenza di curve come quelle ricordate nel testo deducono quella equivalenza (e riescono a dimostrare la presenza di quelle curve per tutti gli autoomeomorfismi periodici del cerchio; di guisa che se un tal autoomeomorfismo conserva per di più il senso delle rotazioni, esso ammette soltanto un punto unito, il punto unito risultando interno al cerchio).

(3) Si vegga l'ultimo paragrafo della sua Memoria: *Sugli autoomeomorfismi del cerchio dotati di un punto unito unico e interno al cerchio*, in corso di stampa nelle «Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg».

(4) Redatta nell'ambito dell'attività dei Gruppi di ricerca del Comitato nazionale per la matematica del C.N.R.

prie immagini nell'autoomeomorfismo e nelle diverse potenze non identiche dell'autoomeomorfismo.

1. Incominciamo col dimostrare alcuni lemmi sugli autoomeomorfismi periodici [5].

Un autoomeomorfismo periodico di un arco semplice è identico se lascia fermi gli estremi dell'arco.

Sia α un arco semplice, sia t un autoomeomorfismo periodico di α di periodo m; sia A un estremo di α. E supponiamo che A sia unito in t. Scelto comunque un punto X di α diverso da A, il sottarco α' di α di estremi A e X viene mutato da t nel sottarco di α di estremi A e $t(\mathrm{X})$. Se $t(\mathrm{X})$ fosse interno ad α', interni ad α' sarebbero anche $t^2(\mathrm{X}), \cdots, t^m(\mathrm{X})$. E questo è assurdo perché $t^m(\mathrm{X})$ coincide con X. Allo stesso modo si dimostra che $t(\mathrm{X})$ non può essere esterno ad α'. Quindi risulta $t(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$.

Un autoomeomorfismo periodico di un cerchio è identico se lascia fermi i punti del contorno del cerchio.

Sia K un cerchio e sia t un autoomeomorfismo periodico di K il quale lasci fermi i punti del contorno, Γ, di K. Scelto comunque un punto X interno a K, sia α un arco semplice che contenga X e abbia gli estremi, A e B, in Γ. Supponiamo anzi che α e Γ abbiano in comune soltanto i punti A e B. Sia Γ' uno dei sottarchi di Γ di estremi A e B. Posto

$$\beta = \Gamma' \cup \alpha ,$$

β è una curva semplice e chiusa. E per l'insieme H,

$$\mathrm{H} = \beta \cup t(\beta) \cup \cdots \cup t^{m-1}(\beta) ,$$

cioè per l'insieme $\mathrm{H} = \Gamma' \cup \alpha \cup \cdots \cup t^{m-1}(\alpha)$, risulta

$$t(\mathrm{H}) = \mathrm{H} , \tag{1}$$

atteso che t ha periodo m. Il complementare dell'insieme chiuso H si spezza in campi massimali. Di questi campi quello che contiene l'infinito ha come frontiera una curva semplice e chiusa, η, atteso che l'intersezione dei campi limitati individuati da $\beta, t(\beta), \cdots, t^{m-1}(\beta)$ non è vuota [6]. E risulta

$$t(\eta) = \eta , \tag{2}$$

attesa la (1). La curva η contiene Γ' perché H contiene Γ' ed è contenuto in K. E η è somma di Γ' e di un altro arco semplice, η', di estremi A e B.

(5) I ragionamenti e i risultati di questo numero sono tratti, nella sostanza, dal lavoro citato di Eilenberg.

(6) G. SCORZA DRAGONI, *Qualche teorema sulle curve di Jordan*, « Rendiconti della R. Accademia dei Lincei », ser. VI, vol. XXIII, 181–186 (1936).

Risulta

$$t(\eta') = \eta',$$

attese la (2) e la $t(\Gamma') = \Gamma'$. E dal lemma precedente segue che t lascia fermi i punti di η'. Di qui e dalla $\eta' \subseteq \alpha \cup t(\alpha) \cup \cdots \cup t^{m-1}(\alpha)$ segue subito $\eta' \subseteq \alpha$; e quindi $\eta' = \alpha$, visto che η' e α hanno gli stessi estremi. E X è unito in t.

Un autoomeomorfismo periodico di un cerchio è identico se lascia fermi più di due punti del contorno del cerchio.

Sia K un cerchio e sia t un autoomeomorfismo periodico di K. Se A, B e C sono tre punti del contorno, Γ, di K uniti in t, quel sottarco di Γ con gli estremi in A e B che contiene C è applicato su sè stesso da t; e quindi la stessa circostanza si presenta anche per l'altro sottarco individuato su Γ da A e B. I punti di Γ sono quindi uniti nella t in virtù del primo lemma di questo numero. Donde la conclusione, atteso il lemma precedente.

2. Supponiamo adesso che t sia un autoomeomorfismo periodico, di periodo m, di un cerchio K con un solo punto unito, O, interno a K. Conveniamo in quanto segue: se E è un sottoinsieme di K indichiamo con E_i ($i = 0, 1, 2, \cdots$) l'immagine di E in t^i.

E dimostriamo che:

Fissato un verso sul contorno, Γ, *di* K, *si può trovare un numero naturale* s *tale che, scelto comunque il punto* P *in* Γ, *i punti* $P, P_s, \cdots, P_{(m-1)s}$ *siano a due a due distinti e si susseguano in* Γ *nel verso fissato.*

L'insieme dei punti di Γ con periodo minore di m è finito [7]. Infatti i punti di Γ che hanno come periodo il numero naturale k ($< m$) sono uniti in t^k; se il loro numero superasse due, t^k sarebbe l'identità, atteso l'ultimo lemma del numero precedente; e questo è incompatibile con la $k < m$. Donde l'affermazione parziale.

Sia Q un punto di Γ di periodo m. Fissiamo un verso su Γ da chiamarsi positivo. Sia Q_s ($0 < s < m$) il primo dei punti Q_i che si incontrano percorrendo Γ nel verso fissato a partire da Q.

La trasformazione t conserva i versi di percorrenza di Γ essendo Γ priva di punti uniti in t; quindi anche la potenza, t^s, di t li conserva. Ne segue che se γ è l'arco che si descrive percorrendo Γ da Q a Q_s nel verso positivo, γ_s è l'arco che si descrive percorrendo Γ da Q_s a Q_{2s} nel verso positivo, γ_{2s} è l'arco $\cdots$, $\gamma_{(m-1)s}$ è l'arco che si descrive percorrendo Γ da $Q_{(m-1)s}$ a $Q_{ms} = Q$ nel verso positivo.

L'unione degli archi $\gamma, \gamma_s, \cdots, \gamma_{(m-1)s}$ esaurisce Γ. Inoltre $\gamma, \gamma_s, \cdots, \gamma_{(m-1)s}$ non contengono all'interno punti Q_i. Infatti se Q_k fosse interno a $\gamma_{\lambda s}$ ($1 < \lambda < m$), $Q_{k+(m-\lambda)s}$ sarebbe interno a γ, mentre γ non contiene all'interno punti Q_i, attesa la scelta di Q_s.

(7) Diciamo che un punto P ha periodo 1, nell'autoomeomorfismo t, se risulta $t(P) = P$; ha periodo $h > 1$, in t, se risulta $t^j(P) \neq P$ per $j = 1, \cdots, h-1$ e $t^h(P) = P$.

Ne segue che i punti $Q, Q_s, \cdots, Q_{(m-1)s}$ esauriscono l'insieme dei punti Q_i; quindi sono a due a due diversi dato che sono al più m e che Q ha periodo m. Quindi gli archi $\gamma, \gamma_s, \cdots, \gamma_{(m-1)s}$ sono a due a due privi di punti interni comuni. E a questo punto la conclusione è facile.

Osserviamo che se s è quel tal numero naturale, l'autoomeomorfismo t^s ammette O come unico punto unito. Infatti allora t^s ha periodo m, quindi fra le sue potenze compare t. E se per il punto $R \neq O$ risultasse $t^s(R) = R$, risulterebbe anche $t^{s\mu}(R) = R$ per ogni intero μ e quindi $t(R) = R$, contro le ipotesi fatte su t.

3. Passiamo a dimostrare l'esistenza di una curva semplice e aperta che unisce O a Γ e incontra le sue immagini in $t, t^2, \cdots, t^{m-1}$ soltanto in O.

Possiamo supporre che quel numero naturale s sia uguale a 1. In caso contrario basterà ragionare su t^s anziché su t.

Atteso il teorema di Scorza Dragoni esiste nel cerchio una curva semplice e aperta, c, che unisce O a Γ ed ha in comune con c_1 soltanto il punto O. Si può supporre che c abbia un estremo in O e l'altro, C, in Γ. Supponiamo anzi che C sia l'unico punto comune a c e Γ. E dimostriamo che c ha in comune soltanto O anche con $c_2, \cdots, c_{m-1}$. Si può procedere per induzione. Supponiamo che c abbia in comune soltanto O con la curva c_{r-1} $(1 < r < m)$ e facciamo vedere che c e c_r hanno in comune soltanto O.

Supponiamo, per assurdo, che c e c_r abbiano in comune punti diversi da O. Allora r è minore di $m - 1$ perché dalla $c \cap c_1 = O$ segue $c_i \cap c_{i+1} = O$ $(i = 0, 1, 2, \cdots)$ e quindi anche $c_{m-1} \cap c = c_{m-1} \cap c_m = O$. Sia D_r il primo dei punti di c che si incontrano percorrendo c_r a partire da C_r. Indichiamo con d'_r il sottarco di c_r di estremi C_r e D_r, con d''_r il sottarco di c di estremi D_r e C e con d_r la curva semplice e aperta $d'_r \cup d''_r$.

Delle due componenti di $K - d_r$, una, $\mathfrak{A}_r$, contiene i punti $C_1, \cdots, C_{r-1}$, l'altra $\mathfrak{B}_r$, i punti $C_{r+1}, \cdots, C_{m-1}$, atteso che i punti $C, C_1, \cdots, C_{m-1}$ si susseguono nel verso positivo di Γ. La curva c_{r-1} ha intersezione vuota con d_r perché incontra c e c_r soltanto in O; quindi essa appartiene ad $\mathfrak{A}_r$ al pari del suo estremo C_{r-1}; quindi anche l'altro suo estremo, il punto O, appartiene ad $\mathfrak{A}_r$. La curva c_{r+1} avendo un estremo, C_{r+1}, in $\mathfrak{B}_r$ e un estremo, O, in $\mathfrak{A}_r$ incontra d_r. E poiché incontra c_r soltanto in O, incontra necessariamente d''_r. Il primo dei punti di d''_r che si incontrano percorrendo c_{r+1} a partire da C_{r+1}, diciamolo D_{r+1}, è diverso da D_r. Indichiamo con d'_{r+1} il sottarco di c_{r+1} di estremi C_{r+1} e D_{r+1}, con d''_{r+1} il sottarco di c di estremi D_{r+1} e C e con d_{r+1} la curva semplice e aperta $d'_{r+1} \cup d''_{r+1}$.

$\mathfrak{A}_{r+1}$ e $\mathfrak{B}_{r+1}$ siano le componenti di $K - d_{r+1}$, $\mathfrak{A}_{r+1}$ quella che contiene $C_1, \cdots, C_r$ e $\mathfrak{B}_{r+1}$ quella che contiene $C_{r+2}, \cdots, C_{m-1}$. L'arco d'_r, avendo intersezione vuota con d_{r+1}, appartiene ad $\mathfrak{A}_{r+1}$ al pari del suo estremo C_r; quindi anche l'altro suo estremo, D_r, appartiene ad $\mathfrak{A}_{r+1}$. Il sottarco di c di estremi D_r e O, avendo intersezione vuota con d_{r+1}, appartiene ad $\mathfrak{A}_{r+1}$ perché ad $\mathfrak{A}_{r+1}$ appartiene D_r. La curva c_{r+2}, avendo un estremo, C_{r+2}, in $\mathfrak{B}_{r+1}$ e un estremo, O, in $\mathfrak{A}_{r+1}$ incontra d_{r+1}; e poiché incontra c_{r+1} soltanto in O, incontra necessariamente d''_{r+1}. Il primo dei punti di d''_{r+1} che si incontrano percorrendo c_{r+2} a partire da C_{r+2}, diciamolo D_{r+2}, è diverso da D_{r+1}. Indichiamo con d'_{r+2} il sottarco di c_{r+2} di estremi C_{r+2} e D_{r+2}, con d''_{r+2} il sottarco di c di estremi D_{r+2} e C e con d_{r+2} la curva semplice e aperta $d'_{r+2} \cup d''_{r+2}$.

$\mathfrak{A}_{r+2}$ e $\mathfrak{B}_{r+2}$ siano le componenti di $K - d_{r+2}, \cdots$.

E così proseguendo si arriva a concludere che anche c_{m-1} interseca c in punti diversi da O, il che è assurdo. Quindi è assurdo supporre che c e c_r abbiano in comune punti diversi da O. E la dimostrazione è terminata.

4. A questo punto un procedimento analogo a quello seguito da Eilenberg nel lavoro citato permette di dimostrare subito che t è topologicamente equivalente ad una rotazione.