Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ida Cattaneo Gasparini

Alcune considerazioni globali suuna varietà compatta a metrica indefinita

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **40** (1966), n.5, p. 804–811.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_40_5_804_0>

Geometria differenziale. — *Alcune considerazioni globali su una varietà compatta a metrica indefinita* (*). Nota di IDA CATTANEO GASPARINI, presentata (**) dal Socio E. BOMPIANI.

SUMMARY. — Some global theorems are given (under particular restrictive conditions) on the existence of harmonic or Killing vector fields on a compact riemannian manifold of signature 1.

La possibilità, messa in evidenza in un precedente lavoro [8], di associare una metrica ellittica ad una metrica indefinita assegnata su una V_{n+1}, permette di ottenere l'estensione al caso di particolari metriche indefinite di segnatura 1, di alcuni classici teoremi globali validi in metrica ellittica. Si tratta di risultati di portata più limitata di quelli noti in metrica definita, ma che possono presentare qualche interesse trattandosi di un campo ancora poco approfondito.

Dopo alcune considerazioni locali riguardanti i campi armonici e i campi di Killing nelle due metriche, si dimostra una proprietà di invarianza della curvatura integrale di Ricci associata alle due metriche; successivamente si estendono, sotto ipotesi restrittive per la varietà, i teoremi di Bochner sull'esistenza di campi armonici e di Killing.

1. METRICHE RECIPROCHE. – Sia V_{n+1} una varietà riemanniana compatta C^∞ munita di una forma quadratica g_{ik} continua, regolare, di segnatura $1\,(-++\cdots+)$. Come è noto (cfr. [18]) tali ipotesi equivalgono all'esistenza in V_{n+1} di un campo globale continuo di vettori non nulli, di norma negativa. Sia $\vec{\gamma}$ un tale campo di vettori, che supporremo unitario, Γ la congruenza da esso definita; $\{x^i\}$ $(i = 0, 1, 2, \cdots, n)$ un sistema di coordinate locali adattate a Γ, cioè tali che le linee coordinate x^0 coincidano con le linee di Γ. Sia poi T_x lo spazio vettoriale tangente nel generico punto x, Θ_x il sottospazio dei vettori collineari a $\vec{\gamma}$ e Σ_x l'n–piano ad esso perpendicolare. In T_x i vettori a norma positiva e quelli a norma negativa sono separati dal cono *isotropo* $(g_{ik}\, v^i\, v^k = 0)$.

Chiameremo *orizzontali* i vettori di Σ, tutti di norma positiva, *verticali* i vettori di Θ, di norma negativa.

La decomposizione $T_x = \Sigma_x \oplus \Theta_x$ munisce la V_{n+1} di una struttura quasi prodotto. Siano

$$\Phi^r_k = \delta^r_k + \gamma^r \gamma_k \tag{1.1}$$

$$\Phi'^r_k = -\gamma^r \gamma_k \tag{1.2}$$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca matematica N° 1 del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 maggio 1966.

i due operatori di proiezione su Σ e su Θ; scritti in forma covariante essi rappresentano le proiezioni complete del tensore metrico g_{ik} su Σ e su Θ rispettivamente:

$$g_{ik} = \Phi_{ik} + \Phi'_{ik}\,. \tag{1.3}$$

Sia poi $\overset{*}{g}_{ik}$ la metrica ellittica reciproca della metrica g_{ik} rispetto alla struttura quasi prodotto (cfr. [8])

$$\overset{*}{g}_{ik} = \Phi_{ik} - \Phi'_{ik}\,. \tag{1.4}$$

Osservazione 1.1. – Tra tutte le infinite metriche che si possono associare a g_{ik}: $g_{ik} + a\gamma_i\gamma_k$ $(a > 1)$, la $\overset{*}{g}_{ik} = g_{ik} + 2\gamma_i\gamma_k$ è quella che conserva il carattere unitario di $\vec{\gamma}$ $(g_{ik}\gamma^i\gamma^k = -1\,,\ \overset{*}{g}_{ik}\gamma^i\gamma^k = 1)$.

Osservazione 1.2. – Un vettore che sia definito in modo indipendente dall'una e dall'altra metrica verrà o no contrassegnato con un asterisco secondo che esso sia, da un punto di vista metrico, misurato mediante la $\overset{*}{g}_{ik}$ o la g_{ik} rispettivamente.

Così si avrà per esempio:

$$\overset{*}{\gamma}{}^i \equiv \gamma^i$$

mentre sarà invece

$$\gamma_i = g_{ik}\gamma^k \qquad \overset{*}{\gamma}_i = \overset{*}{g}_{ik}\gamma^k = -\gamma_i\,.$$

Osservazione 1.3. – Posto $g = \det(g_{ik})$; $\overset{*}{g} = (\det \overset{*}{g}_{ik})$, si ha

$$\overset{*}{g} = -g\,. \tag{1.5}$$

Si dimostra facilmente la validità della (1.5) in un riferimento ortonormale $\{\vec{e}_i\}$ con $\vec{e}_0 \equiv \vec{\gamma}$. La (1.5) resta valida in un riferimento qualunque poiché la trasformazione dei due membri della (1.5) si ottiene moltiplicando i due termini per uno stesso fattore. Indicato con dV e $d\overset{*}{V}$ l'elemento di volume calcolato nelle due metriche si ha allora

$$dV = d\overset{*}{V}. \tag{1.6}$$

2. DERIVAZIONE COVARIANTE E TENSORI DI CURVATURA NELLE DUE METRICHE. – Siano Γ^l_{ij}, $\overset{*}{\Gamma}{}^l_{ij}$ i simboli di Christoffel relativi alle due metriche in una stessa carta coordinata. Per il tensore $\rho^l_{ij} = \overset{*}{\Gamma}{}^l_{ij} - \Gamma^l_{ij}$ si riconosce l'espressione seguente

$$\rho^l_{ij} = -\gamma^l\,\tilde{K}_{ij} + \Phi^{lr}\left[\gamma_j\,\tilde{\Omega}_{ir} + \gamma_i\,\tilde{\Omega}_{jr} - 2\gamma_i\gamma_j C_r\right] \tag{2.1}$$

ove si è posto (1)

$$\tilde{\Omega}_{ij} \equiv \Phi_i^r \Phi_j^s (\nabla_r \gamma_s - \nabla_s \gamma_r) \tag{2.2}$$

$$\tilde{K}_{ij} \equiv \Phi_i^r \Phi_j^s (\nabla_r \gamma_s + \nabla_s \gamma_r) \tag{2.3}$$

$$C^i \equiv \gamma^r \nabla_r \gamma^i . \tag{2.4}$$

Il significato geometrico dei tensori orizzontali $\tilde{\Omega}_{ij}$, $\tilde{K}_{ij}$, C^i è noto [6]. L'annullarsi di $\tilde{\Omega}_{ij}$ caratterizza le congruenze normali, l'annullarsi di $\tilde{K}_{ij}$ le congruenze rigide, e l'annullarsi di C^i quelle geodetiche.

Sulla base della formula (2.1) si stabilisce in modo immediato il teorema seguente:

TEOREMA 2.1. – *La divergenza di un campo arbitrario di vettori ha lo stesso valore nelle due metriche.*

Infatti con semplici calcoli si può controllare che $\rho_{li}^{i} = 0$ e quindi

$$\overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{v}^i = \nabla_i v^i \quad (2). \tag{2.5}$$

Una formula classica (cfr. [11] p. 236) fornisce per la differenza tra i tensori di Riemann associati a due metriche definite su una stessa varietà l'espressione seguente (3)

$$\overset{*}{R}{}^r{}_{i,hk} - R^r{}_{i,hk} = \nabla_k \rho_{ih}^r - \nabla_h \rho_{ik}^r - (\rho_{lh}^r \rho_{ik}^l - \rho_{lk}^r \rho_{ih}^l) . \tag{2.6}$$

Esplicitando ρ_{ik}^l mediante le (2.1) e contraendo r con k, con un calcolo piuttosto laborioso si giunge alla seguente relazione tra i due tensori di Ricci

$$\begin{aligned} \overset{*}{R}_{ih} - R_{ih} = & - \mathfrak{L}(\vec{\gamma})\, \tilde{K}_{ih} - \frac{1}{2} \tilde{K}_{ih} \tilde{K}^r_r + \tilde{K}_{is} \tilde{K}^s{}_h - \tilde{\Omega}_{ri} \tilde{\Omega}^r_h + \\ & + \gamma_h (\tilde{\nabla}_r \tilde{\Omega}_i^r + 2 C^l \tilde{\Omega}_{il}) + \gamma_i (\tilde{\nabla}_r \tilde{\Omega}_h^r + 2 \tilde{C}^l \tilde{\Omega}_{hl}) - 2 \gamma_i \gamma_h (\tilde{\nabla}_r C^r + C_r C^r) . \end{aligned} \tag{2.7}$$

$\mathfrak{L}(\vec{\gamma})$ indicando la derivazione di Lie secondo il campo di vettori $\vec{\gamma}$ e $\tilde{\nabla}$ la derivazione trasversa [6].

Nella (2.7) ogni termine ha un significato intrinseco rispetto alla struttura quasi prodotto: ciò permetterà la discussione sistematica di alcuni casi particolari di sicuro contenuto geometrico.

3. CAMPI DI VETTORI ARMONICI O DI KILLING. – Un campo di vettori, armonico nella metrica g_{ik}, non è generalmente armonico nella metrica $\overset{*}{g}_{ik}$ se il campo γ che determina la struttura quasi prodotto è scelto ad arbitrio. Valgono però i teoremi seguenti.

(1) Il segno $\sim$ sopra un tensore indica la proiezione del tensore su Σ.

(2) $\overset{*}{\nabla}$ e ∇ indicano rispettivamente la derivazione covariante nella metrica $\overset{*}{g}_{ik}$ e nella metrica g_{ik}.

(3) Le convenzioni di segno usate per il tensore di Riemann e per il tensore di Ricci sono quelle dello YANO BOCHNER [20].

TEOREMA 3.1. – *Se* ξ^i *è un campo di vettori di norma positiva armonico nella metrica* g_{ik} *esso è ancora armonico nella metrica definita* $\overset{*}{g}_{ik}$ *associata a* g_{ik} *tramite un qualunque campo di vettori unitari di norma negativa e ortogonali* a ξ^i.

TEOREMA 3.2. – *Se* η^i *è un campo di vettori di norma negativa armonico nella metrica* g_{ik} *esso risulta ancora armonico nella metrica* $\overset{*}{g}_{ik}$ *associata a* g_{ik} *tramite il campo unitario* $\vec{\gamma}$ *collineare a* $\vec{\eta}$.

Si ha infatti nel primo caso

$$\overset{*}{\xi}_i = \xi_i \tag{3.1}$$

nel secondo caso

$$\overset{*}{\eta}_i = -\eta_i . \tag{3.2}$$

In entrambi i casi (scrivendo v_i in luogo di ξ_i e di η_i) si ha, tenuto anche conto del Teor. 2.1,

$$\partial_i v_j - \partial_j v_i = 0 \Longleftrightarrow \partial_i \overset{*}{v}_j - \partial_j \overset{*}{v}_i = 0$$

$$\nabla_i v^i = 0 \Longleftrightarrow \overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{v}^i = 0 .$$

Come è noto (cfr. [20]) un campo di vettori $\vec{\xi}$ si dice di Killing se esso è generatore di un gruppo di isometrie. Esso soddisfa allora alle seguenti condizioni

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0 \tag{3.3}$$

che implicano

$$\nabla_\alpha \xi^\alpha = 0. \tag{3.4}$$

Vale il seguente teorema:

TEOREMA 3.3. – *Se un campo* $\vec{\eta}$ *di norma negativa è di Killing per la metrica* g_{ik} *esso è anche di Killing per la metrica ellittica associata* $\overset{*}{g}_{ik} = g_{ik} + 2\gamma_i\gamma_k$ *con* $\vec{\gamma}$ *collineare a* $\vec{\eta}$.

Sia infatti

$$\vec{\eta} = \eta \vec{\gamma} .$$

Se $\vec{\eta}$ è un campo di Killing vale la (3.3) ossia

$$\eta\,(\nabla_k \gamma_i + \nabla_i \gamma_k) + \gamma_k \partial_i \eta + \gamma_i \partial_k \eta = 0 \tag{3.5}$$

e proiettando su Σ

$$\Phi^k_r \Phi^i_s \{\eta\,(\nabla_k \gamma_i + \nabla_i \gamma_k) + \gamma_k \partial_i \eta + \gamma_i \partial_k \eta\} = 0 \tag{3.6}$$

ossia, tenuto conto della (2.3)

$$\overset{\circ}{K}_{rs} = 0 . \tag{3.7}$$

D'altra parte

$$\overset{*}{\nabla}_i \eta_k + \overset{*}{\nabla}_k \eta_i = \nabla_i \eta_k + \nabla_k \eta_i - 2\rho_{ik}^r \eta_r \tag{3.8}$$

$$= \nabla_i \eta_k + \nabla_k \eta_i + 2\gamma^r \overset{\circ}{K}_{ik} \eta_r$$

e, tenendo conto di (3.3) e di (3.7) si ha la tesi.

4. ALCUNI TEOREMI GLOBALI. - In tutto il seguito supporremo che la varietà riemanniana V_{n+1} di segnatura $s = 1$, sia compatta e orientabile (r.c.o. $s = 1$).

TEOREMA 4.1. - *In una* V_{n+1} *r.c.o.* $s = 1$ *la curvatura globale di Ricci* (4) *secondo il vettore* $\vec{\gamma}$ *è la stessa nelle due metriche*. In simboli

$$\int_{V_{n+1}} \overset{*}{R}_{ik} \gamma^i \gamma^k \overset{*}{\eta} = \int_{V_{n+1}} R_{ik} \gamma^i \gamma^k \eta \tag{4.1}$$

ove η e $\overset{*}{\eta}$ sono le n–forme, elemento di volume, associate alle due metriche.

Infatti dalla (2.7) si ricava

$$\overset{*}{R}_{ik} \gamma^i \gamma^k - R_{ik} \gamma^i \gamma^k = -2(\overset{\circ}{\nabla}_r C^r + C_r C^r). \tag{4.2}$$

Poiché, come si può facilmente verificare,

$$\overset{\circ}{\nabla}_r C^r + C_r C^r \equiv \nabla_r C^r,$$

essendo

$$\int_{V_n} \overset{*}{\nabla}_r C^r \overset{*}{\eta} = 0$$

segue il teorema.

TEOREMA 4.2. - *Su una* V_{n+1} *r.c.o.* $s = 1$, *non esistono campi armonici geodetici di norma negativa, soddisfacenti alla disuguaglianza* $R_{ik} \eta^i \eta^k > 0$.

Ammettiamo infatti per assurdo, che η^i sia un campo armonico geodetico, di norma negativa, soddisfacente alla disuguaglianza $R_{ik} \eta^i \eta^k > 0$. Per il teorema 3.2 esso dovrebbe essere armonico anche nella metrica $\overset{*}{g}_{ik} = g_{ik} + 2\gamma_i \gamma_k$ con $\gamma^i = -\frac{\eta_i}{\eta_k \eta^k}$. D'altro lato, dalla formula (2.7) si ricaverebbe, nelle ipotesi ammesse,

$$\overset{*}{R}_{ik} \eta^i \eta^k = R_{ik} \eta^i \eta^k > 0$$

ciò che per un campo armonico rispetto alla metrica ellittica è escluso da un noto teorema di Bochner ([20] p. 37).

(4) La curvatura di Ricci nel punto x e nella direzione del vettore $\vec{\xi}$ è data da $K(x, \vec{\xi}) = \frac{R_{ih} \xi^i \xi^h}{g_{ih} \xi^i \xi^h}$.

TEOREMA 4.3. – *Su una* V_{n+1} *r.c.o.* $s=1$ *non esistono campi di Killing geodetici di norma negativa soddisfacenti alla disuguaglianza* $R_{ik}\eta^i\eta^k<0$.

La dimostrazione è analoga a quella del teorema precedente salvo utilizzare il teorema 3.3 anziché il teorema 3.2 e valersi del teorema di Bochner, in metrica ellittica, relativo all'esistenza di campi di Killing ([20] p. 39).

TEOREMA 4.4. – *Sia* V_{n+1} *una varietà r.c.o.* $s=1$ *che ammette un campo di vettori unitari* $\vec{\gamma}$ *di norma negativa, a divergenza nulla, definenti una congruenza normale e tale* che $\mathcal{L}(\vec{\gamma})\,\tilde{K}_{ik}=0$. Su una tale varietà non esistono campi armonici orizzontali $\vec{\xi}$ (cioè ortogonali a $\vec{\gamma}$) che rendano ovunque $R_{ik}\xi^i\xi^k>0$.

Infatti supposto per assurdo che $\vec{\xi}$ sia un campo armonico orizzontale, nelle nostre ipotesi dalla (2.7) si ha

$$\overset{*}{R}_{ih}\xi^i\xi^h=R_{ih}\xi^i\xi^h+\tilde{K}_{it}\tilde{K}^t{}_h\xi^i\xi^h. \tag{4.4}$$

Per la simmetria e il carattere orizzontale di $\tilde{K}_{ih}$, risulta

$$\tilde{K}_{is}\tilde{K}^s{}_k\xi^i\xi^k\geq 0.$$

Dall'ipotesi $R_{ik}\xi^i\xi^k>0$ seguirebbe allora $\overset{*}{R}_{ik}\xi^i\xi^k>0$, fatto che invece è da escludere, a norma del sopracitato teorema di Bochner.

TEOREMA 4.5. – *Sia* V_{n+1} *una varietà r.c.o.* $s=1$ *che ammetta un campo di vettori* $\vec{\gamma}$ *di norma negativa definenti una congruenza normale e rigida* ($\tilde{\Omega}_{ij}=0$, $\tilde{K}_{ij}=0$):

a) *non esistono campi orizzontali armonici* ξ^i *tali che*

$$R_{ik}\xi^i\xi^k>0;$$

b) *non esistono campi orizzontali di Killing* ξ^i *tali che*

$$R_{ik}\xi^i\xi^k<0.$$

La tesi *a*) segue immediatamente dal predetto teorema di Bochner per metrica ellittica.

Quanto alla tesi *b*) si osservi anzitutto che nelle ipotesi ammesse per la varietà V_{n+1}, un campo orizzontale che sia di Killing nella metrica $\overset{*}{g}_{ik}$ è anche di Killing nella metrica g_{ik} e viceversa.

$$\left\{\begin{array}{l}\nabla_i\xi_j+\nabla_j\xi_i=0\\ \nabla_i\xi^i=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}\overset{*}{\nabla}_i\overset{*}{\xi}_j+\overset{*}{\nabla}_j\overset{*}{\xi}_i=0\\ \overset{*}{\nabla}_i\overset{*}{\xi}^i=0\,.\end{array}\right. \tag{4.5}$$

Infatti

$$\overset{*}{\nabla}_i\overset{*}{\xi}_j+\overset{*}{\nabla}_j\overset{*}{\xi}_i=\nabla_i\xi_j+\nabla_j\xi_i+4\gamma_i\gamma_jC_r\xi^r.$$

Dall'ipotesi $\nabla_i\xi_j+\nabla_j\xi_i=0$ segue

$$\overset{*}{\nabla}_i\overset{*}{\xi}_j+\overset{*}{\nabla}_j\overset{*}{\xi}_i-4\gamma_i\gamma_jC_r\xi^r=0\,. \tag{4.6}$$

Innalzando l'indice i con la metrica $\overset{*}{g}{}^{rs}$ e ponendo $i = j$, si ha

$$2 \overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{\xi}{}^i + 4 \mathrm{C}_r \xi^r = 0 .$$

D'altra parte da $\nabla_i \xi^i = 0$ segue $\overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{\xi}{}^i = 0$ (Teor. 2.1) e quindi $\mathrm{C}_r \xi^r = 0$ e pertanto dalla (4.6) si ha

$$\overset{*}{\nabla}_i \overset{*}{\xi}_j + \overset{*}{\nabla}_j \overset{*}{\xi}_i = 0 .$$

Una volta riconosciuto che il campo ξ^i è di Killing nella metrica g_{ik}, il più volte ricordato teorema di Bochner conduce alla tesi.

Il teorema di Bochner si applica indistintamente a tutti i vettori sia di norma positiva che di norma negativa, nel caso in cui la varietà ammetta un campo $\vec{\eta}$ di vettori paralleli di norma negativa (la varietà si dice allora ricorrente cfr. [16]).

Per tale tipo di varietà si può allora enunciare il teorema.

TEOREMA 4.6. – *In una* V_{n+1} *r.c.o.* $s = 1$ *che ammette un campo* $\vec{\gamma}$ *di vettori paralleli di norma negativa:*

a) *non ci sono campi* $\vec{\xi}$ *di vettori armonici che soddisfano alla*

$$\mathrm{R}_{ik} \xi^i \xi^k > 0 ;$$

b) *non ci sono campi* $\vec{\xi}$ *di vettori di Killing che soddisfano alla*

$$\mathrm{R}_{ik} \xi^i \xi^k < 0 .$$

Basta osservare che l'esistenza di un campo di vettori $\vec{\gamma}$ di norma negativa e paralleli porta

$$\overset{\circ}{\Omega}_{ij} = 0 \qquad \overset{\circ}{\mathrm{K}}_{ij} = 0 \qquad \mathrm{C}_r = 0$$

onde

$$\overset{*}{\mathrm{R}}_{ik} = \mathrm{R}_{ik} \qquad \rho^l_{ij} = 0 .$$

Il teorema di Bochner nella metrica ellittica associata si traduce quindi in modo immediato nella metrica data.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. AVEZ, *Définition des varietés complètes à metriques indefinies*, « C. R. Ac. Sc. », *240*, 485–487 (1955).

[2] — *Théorie de Hodge–de Rham en metrique de signature quelconque*, « C. R. Ac. Sc. », *249*, 1441–1443 (1959) e *250*, 654–656 (1960).

[3] S. BOCHNER, *Vector fields and Ricci curvature*, « Bull. Amer. Math. Soc. », *52*, 776–797 (1946).

[4] — *Curvature and Betti numbers*, « Ann. of Math. », *49*, 379–390 (1948).

[5] E. CARTAN, *Leçons sur la géometrie des espaces de Riemann*, Gauthier–Villars, Paris 1951.

[6] C. CATTANEO, *Proiezioni naturali e derivazione trasversa*, « Ann. Mat. pura e appl. » [IV] XLVIII (1959).

[7] I. CATTANEO GASPARINI, *Sulle G-strutture di una* V_n *definite da una 1-forma vett.* Φ, « Ann. Mat. pura e appl. » [IV], LXV (1964).

[8] — *Struttura metrica adattata a una struttura quasi prodotto*, « Acc. Naz. Lincei », ser. VIII, vol. XXXVI, maggio (1964).

[9] G. DE RHAM, *Variétés differentiables*, Hermann, Paris.

[10] W. V. D. HODGE, *The theory and applications of harmonic integrals*, Second edition. Cambridge University Press (1952).

[11] T. LEVICIVITA, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto*, Zanichelli, Bologna (1925).

[12] A. LICHNEROWICZ, *Courbure et nombres de Betti d'une varieté riemannienne compacte*, « C. R. Acad. Sci. », *226*, 1678–1680 (1948).

[13] — *Sur certaines classes d'espaces riemanniens compactes*, « C. R. Ac. Sc. », *230*, 2146–2148 (1950).

[14] S. B. MYERS, *Riemannian manifolds with positive mean curvature*, « Duke Math. J. », *8*, 401–404 (1941).

[15] G. B. RIZZA, *Campi irrotazionali e di Killing su una varietà compatta*, « Rend. Mat. Appl. ».

[16] H. S. RUSE, *Three dimensional spaces of recurrent curvature*, « Proc. London, Math. Soc. », *50*, 438–446 (1947).

[17] B. SEGRE, *Forme differenziali e loro integrali*, Docet, Roma (1951).

[18] N. STEENROD, *The topology of fibre bundles*, Princeton University Press (1951).

[19] A. G. WALKER, *On Ruse's spaces of recurrent curvature*, « Proc. London Math. Soc. », *52*, 36–64 (1950).

[20] K. YANO–S. BOCHNER, *Curvature and Betti numbers*, « Ann. of. Math. Studies », Princeton University Press (1953)

[21] K. YANO, *On harmonic and Killing vector fields*, « Ann. of Math. », *55*, 38-45 (1952).