

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI

# RENDICONTI

---

MARIO COMO

## Svergolamento elastico delle travi precomprese di parete sottile

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 41 (1966), n.1-2, p. 51-55.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<[http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1966\\_8\\_41\\_1-2\\_51\\_0](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_41_1-2_51_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>



**Meccanica.** — *Svergolamento elastico delle travi precomprese di parete sottile.* Nota di MARIO COMO, presentata (\*) dal Socio G. KRALL.

SUMMARY. — Torsional buckling of prestressed thin-walled beams is studied and numerous technical applications are developed.

1. GENERALITÀ. — L'analisi della stabilità dell'equilibrio delle travi precomprese ha acquistato negli ultimi tempi interesse particolarmente sentito per il grande sviluppo della tecnologia del precompresso e le attuali realizzazioni di strutture sottili [1].

Oggetto di questa Nota è quello di esaminare tale questione nel campo delle travi di sezione sottile. Il problema viene affrontato secondo la via energetica confermando, per il campo elastico, risultati che determinammo per altra via. Si dimostra precisamente che *la precompressione non dà instabilità né di Eulero né di svergolamento secondo Prandtl-Michell.* Al più si ha una *non preoccupante* instabilità torsionale assai oltre quella di Eulero-Prandtl-Michell.

2. SVERGOLAMENTO ELASTICO. — CASO DEL CAVO RETTILINEO ECCENTRICO E SEZIONE TRASVERSALE DI FORMA QUALSIASI. — Si esamini il caso di una trave di sezione aperta sottile di forma qualsiasi e siano  $x, y$  gli assi centrali

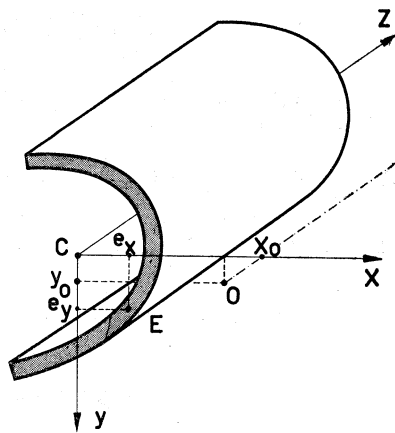


Fig. 1.

di inerzia della sezione,  $z$  l'asse dei baricentri C. Siano inoltre  $x_0, y_0$  le coordinate del centro di torsione O ed  $e_x, e_y$  le coordinate del centro di pressione E, corrispondente all'azione di precompressione esercitata dal cavo, con tiro  $N_p$ , passante aderente nella trave (fig. 1).

(\*) Nella seduta del 12 marzo 1966.

Lo stato di tensione lungo le sezioni trasversali della trave, nell'ipotesi di comportamento elastico, è costituito dalla distribuzione di tensioni normali

$$(1) \quad \sigma_z = -\frac{N_p}{A} - \frac{N_p e_y}{I_x} y - \frac{N_p e_x}{I_y} x$$

e dalla forza concentrata  $N_p$ , applicata in  $E$ , che equilibra la distribuzione di tensioni (1).

Sia  $C_0$  la configurazione di equilibrio della trave cui corrispondono le (1); la qualità dell'equilibrio in  $C_0$  scaturisce dall'analisi della condizione

$$(2) \quad \delta(L_2^* + W) = 0$$

di ben noto significato [2] e dove ovviamente non compare il termine  $L_2$ , lavoro del secondo ordine delle forze esterne, essendo queste assenti.

Il lavoro del secondo ordine degli sforzi interni va valutato tenendo in conto, l'effetto delle tensioni (1) e del tiro  $N_p$ ; si ha così

$$(3) \quad L_2^* = \int_0^l \int_A \sigma_z \varepsilon_{zz}^{(2)} dA dz + \int_0^l N_p \varepsilon_{zz_x}^{(2)} dz$$

se  $l$  ed  $A$  sono rispettivamente la lunghezza della trave e l'area della sua sezione trasversale ed  $\varepsilon_{zz}^{(2)}$  la dilatazione del secondo ordine delle fibre longitudinali.

Per una deviazione per flessione  $u(z)$ ,  $v(z)$  e torsione  $\varphi = \varphi(z)$  della trave, le componenti dello spostamento lungo  $x$  ed  $y$  risultano,

$$(4) \quad \begin{cases} u(x, y, z) = u(z) + (y_0 - y) \varphi(z), \\ v(x, y, z) = v(z) - (x_0 - x) \varphi(z). \end{cases}$$

Si ha allora da

$$(5) \quad \varepsilon_{zz}^{(2)} = \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2) \quad , \quad (\quad)' = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$(6) \quad \begin{cases} \varepsilon_{zz}^{(2)} = \frac{1}{2} [u'^2 + (y_0 - y)^2 \varphi'^2 + 2(y_0 - y) u' \varphi'] + \\ + \frac{1}{2} [v'^2 + (x_0 - x)^2 \varphi'^2 - 2(x_0 - x) v' \varphi'] . \end{cases}$$

Sostituendo le (1) e (6) nella (3) si ricava con semplici passaggi

$$(7) \quad L_2^* = -\frac{N_p}{2} \left( \frac{I_x + I_y}{A} + e_x \beta_x + e_y \beta_y - e_x^2 - e_y^2 \right) \int_0^l \varphi'^2 dz$$

ove  $I_x$  ed  $I_y$  sono i momenti centrali di inerzia della sezione, quindi rispetto  $x$  ed  $y$ , e  $\beta_x$ ,  $\beta_y$  rispettivamente le quantità

$$(8) \quad \begin{cases} \beta_x = \frac{1}{I_y} \left( \int_A x^3 dA + \int_A x y^2 dA \right) \\ \beta_y = \frac{1}{I_x} \left( \int_A y^3 dA + \int_A x^2 y dA \right) . \end{cases}$$

Nella (7) compare solo il lavoro per la rotazione torsionale  $\varphi(z)$ . Non si sviluppa così lavoro per le flessioni  $u(z)$  e  $v(z)$ , come doveva del resto facilmente pensarsi per l'equilibrio delle azioni interne (1), lungo l'intera sezione trasversale, con lo sforzo  $N_p$  in E.

Ciò spiega l'impossibilità già nota (Magnel, Leonhardt) dell'instabilità di Eulero per precompressioni assiali ed, inoltre, l'impossibilità di flessione deviata secondo Prandtl-Michell. L'energia  $W$  che interviene nella (3) vale, in conformità con (4),

$$(9) \quad W = \frac{1}{2} C \int_0^l \varphi'^2 dz + \frac{1}{2} C_1 \int_0^l \varphi''^2 dz$$

con  $C$  e  $C_1$  torsiorigidezza e warping-rigidity e quindi

$$(10) \quad C = G J \quad , \quad C_1 = E J_\omega$$

con

$$(11) \quad J \cong \frac{1}{3} h t^3 \quad , \quad J_\omega = \int_A \omega^2 dA \quad ,$$

avendo indicato con  $G$  ed  $E$  i moduli di elasticità tangenziale e longitudinale del materiale, con  $h$  e  $t$  rispettivamente la lunghezza della linea media della sezione della trave e lo spessore della parete, e con  $\omega$  la coordinata settoriale.

Formulate le (8) e (10) il problema della ricerca degli eventuali sforzi di precompressione critici va risolto caso per caso a seconda delle condizioni ai limiti; così, considerando il caso notevole di sezioni di estremità impedito di ruotare ma libere di ingobbarsi, cioè con

$$(12) \quad \varphi = \varphi'' = 0 \quad \text{per} \quad z = 0 = l,$$

si ha facilmente

$$(13) \quad N_{p \text{ crit.}} = \frac{C_1 \frac{\pi^2}{l^2} + C}{\frac{I_x + I_y}{A} + e_x \beta_x + e_y \beta_y - e_x^2 - e_y^2}$$

ritrovando la (41) di [3].

3. CASI PARTICOLARI E DISCUSSIONE DEI RISULTATI. – L'esame della (13) anzitutto mostra come la presenza della precompressione assiale possa esercitare talvolta un'azione stabilizzante anziché instabilizzante.

Se l'eccentricità  $e_x$  ed  $e_y$  del cavo infatti sono tali da rendere negativo il denominatore della (13) un eventuale fenomeno di svergolamento per torsione della trave potrebbe verificarsi se questa fosse pretesa anziché precompressa, pensando ad esempio riscaldato e termicamente isolato il cavo scorrevole nella guaina aderente e fissato agli estremi.

Se il cavo è baricentrico l'instabilità della trave precompressa è senz'altro possibile e si ha dalla (14) in particolare

$$(14) \quad N_{\phi_{crit.}} = \frac{A}{I_x + I_y} \left( C_1 \frac{\pi^2}{l^2} + C \right)$$

mentre le eccentricità che rendono minimo lo sforzo critico di precompressione sono

$$(15) \quad e_x = \frac{\beta_x}{2} \quad e_y = \frac{\beta_y}{2}$$

e si ha

$$(16) \quad N_{\phi_{crit. min.}} = \frac{C_1 \frac{\pi^2}{l^2} + C}{\frac{I_x + I_y}{A} + \frac{1}{4} (\beta_x^2 + \beta_y^2)}$$

Se la sezione della trave è in particolare una sezione rettangolare sottile  $t \times h$  della (14) discende

$$N_{\phi_{crit.}} = 4 G \frac{t^3}{h}$$

e si ha ancora

$$(17) \quad \sigma_{\phi_{crit.}} = 4 G \left( \frac{t}{h} \right)^2$$

per cui il rapporto spessore-altezza acquista il significato di snellezza. Soltanto per spessori molto sottili la (17) può acquistare un effettivo significato per essere limitata al campo elastico proporzionale; riduzioni della  $\sigma_{\phi_{crit.}}$  sono senz'altro prevedibili invece per sezioni sottili in cui lo sviluppo della sezione può essere più sensibile di quello della sezione rettangolare.

Si esamini così la sezione a T, di uso frequente; in tal caso, facendo riferimento alla fig. 2 si ha [4]

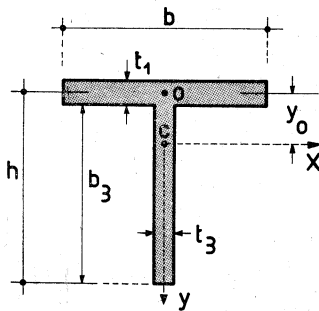


Fig. 2.

$$C = \frac{G}{3} (b_1 t_1^3 + b_3 t_3^3)$$

$$I_x = \frac{t_3 b_3^2}{12} + t_3 b_3 \left( \frac{h}{2} - y_0 \right)^2 + t_1 b_1 y_0^2$$

$$I_y = \frac{t_1 b_1^3}{12}$$

$$y_0 = - \frac{b_3 t_3 \frac{h}{2}}{b_3 t_3 + b_1 t_1}$$

e considerando per semplicità il caso di  $t_1 = t_3 = t$   $b_3 = b_1 = b$  e di precompressione baricentrica,

$$(18) \quad \sigma_{\phi_{crit.}} = 2,28 G \left( \frac{t}{b} \right)^2$$

Considerando invece la voltina illustrata nella fig. 3, precompressa da due cavi che rendono la sollecitazione baricentrica, essendo [4]

$$J_{\omega} = 0,0374 tr^5 \quad C = G \pi \frac{rt^3}{3}$$

ed inoltre

$$\frac{I_x + I_y}{A} \cong r^2$$

si ha, tenendo in conto la warping rigidity,

$$(19) \quad \sigma_{p_{crit.}} \cong \left[ 0,119 E \left( \frac{r}{l} \right)^2 + 0,330 \left( \frac{t}{r} \right)^2 G \right].$$

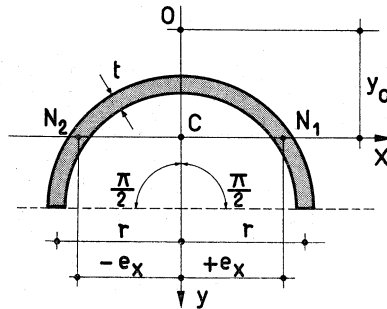


Fig. 3.

Se si ammette un rapporto  $r/l$  eguale a quello  $t/r$  si ha ancora, con  $G=0,4 E$ ,

$$\sigma_{p_{crit.}} \cong 0,625 G \psi^2 \quad \text{con} \quad \psi = \frac{r}{l} = \frac{t}{r}.$$

Per  $\psi = 1/15$  si ha così  $\sigma_{p_{crit.}} = 222 \text{ Kg/cm}^2$  con  $G = 80.000 \text{ Kg/cm}^2$  e l'instabilità torsionale acquista un certo interesse per calcestruzzi ad hoc, come, si può dire per le sezioni dotate di notevole sviluppo; ciò appare del resto già nella (17) se si pensa piccolissimo il rapporto  $t/h$ . Se ciò non ha un effettivo significato per la sezione rettangolare molto allungata esso diventa importante per altre sezioni come quelle a T, a doppio T, a semicerchio, a C etc. In queste l'ingobbamento settoriale [4] fa aumentare la  $\sigma_{p_{crit.}}$  per il contributo della  $C_1$  come appare dalla (14).

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] F. LEONHARDT, *Spannbeton*, Kap. 15, Verlag V. W. Ernst, Berlin 1952; G. MAGNEL, *Theorie und Praxis des Spannbetons*, Kap. 7. Wiesbaden - Berlin 1956.
- [2] G. KRALL, *Sulla stabilità dell'equilibrio di barre in profilato sottile*, Nota I e II, « Rend. Acc. Naz. Lincei », ser. 8ª, voll. XXXII, XXXIII (1962).
- [3] M. COMO, *Stabilità dell'equilibrio elastico della trave di parete sottile precompressa*, « La Ricerca Scientifica », 7, N. 3 (1964).
- [4] S. TIMOSHENKO, *Theory of elastic stability*, Cap. 5; M. G. Hill, New York 1961.