Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Pietro Caloi

L'equazione di Rayleigh e le onde di Somigliana. - I. Le onde di Rayleigh

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **41** (1966), n.1-2, p. 8–17.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1966_8_41_1-2_8_0>

Geofisica. — *L'equazione di Rayleigh e le onde di Somigliana. – I. Le onde di Rayleigh.* Nota (*) del Socio PIETRO CALOI.

SUMMARY. — The theory of Rayleigh waves at the surface of an elastic half-space is briefly described. A new formula for the determination of the ratio of horizontal to vertical component of motion is obtained.

Application limits of theory are examined.

1. PREMESSA. – Verso la metà del secolo scorso, soprattutto per merito di Lamé, Green, Stokes, ... si era pervenuti alla sistemazione della teoria concernente la propagazione dei micromovimenti in un corpo elastico, omogeneo, isotropo, indefinito. Si sapeva che, in un tale mezzo, potevano propagarsi due tipi di perturbazioni: una che provocava variazioni di volume (onde di compressione e dilatazione, od onde longitudinali), l'altra associata a rotazioni infinitesime in piani ortogonali alla direzione di propagazione (onde di distorsione o trasversali), caratterizzate da invarianza di volume.

Nel 1885 Lord Rayleigh (1) si propose di vedere se, oltre ai sistemi su detti di onde longitudinali e trasversali, potevano sussistere movimenti interessanti esclusivamente la parte superficiale del mezzo e propagantisi alla superficie dello stesso.

In sostanza, Rayleigh studiò teoricamente la possibilità dell'esistenza di sistemi superficiali di onde, come conseguenza della sovrapposizione di onde longitudinali e trasversali (oscillanti nel piano verticale) ordinarie.

Il problema si riconduce pertanto a ricercare a quali condizioni coppie di onde longitudinali e trasversali, interferendo, possono originare sistemi di oscillazioni propagantisi alla superficie di un mezzo solido elastico, isotropo, indefinito.

2. Poiché, per ipotesi, le variazioni u, v, w delle coordinate x, y, z di un punto generico, dovranno risultare da contributi di movimenti longitudinali e trasversali, potremo esprimere u, v, w in funzione delle variazioni che subiscono certe funzioni caratteristiche delle onde di compressione e di distorsione, rispettivamente.

A tale scopo siano ψ, L, M, N quattro funzioni di x, y, z e del tempo t, continue e derivabili in là quanto si vuole.

Se L, M, N soddisfano alla relazione

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z} = 0, \tag{1}$$

(*) Presentata nella seduta del 22 giugno 1966.

le

$$(2) \qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial \psi}{\partial x} + \dfrac{\partial N}{\partial y} - \dfrac{\partial M}{\partial z} \\[2mm] v = \dfrac{\partial \psi}{\partial y} + \dfrac{\partial L}{\partial z} - \dfrac{\partial N}{\partial x} \\[2mm] w = \dfrac{\partial \psi}{\partial z} + \dfrac{\partial M}{\partial x} - \dfrac{\partial L}{\partial y}, \end{cases}$$

realizzano le espressioni di u, v, w da noi ricercate.

Infatti se indichiamo con ϑ la dilatazione cubica e con

$$\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) \quad , \quad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \quad , \quad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

rispettivamente, le rotazioni infinitesime in piani ortogonali agli assi x, y, z, dalle (1), (2) otteniamo

$$\vartheta = \Delta_2 \psi,$$

$$(3) \qquad 2\xi = -\Delta_2 L \quad , \quad 2\eta = -\Delta_2 M \quad , \quad 2\zeta = -\Delta_2 N,$$

essendo Δ_2 l'operatore di Laplace.

Ne consegue che ψ è funzione caratteristica delle perturbazioni elastiche irrotazionali, mentre le L, M, N sono rappresentative delle perturbazioni rotazionali, con invarianza di volume.

Se λ, μ sono le costanti di Lamé del mezzo solido considerato, di densità ρ, dalle equazioni fondamentali dei micromovimenti in un corpo solido, fatta astrazione del termine rappresentante le forze esterne, si ottiene agevolmente per i moti longitudinali l'equazione.

$$(4) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho} \Delta_2 \psi,$$

dove

$$v_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$$

rappresenta la velocità di propagazione, mentre per i moti distorsionali (trasversali), lungo gli assi x, y, z valgono le equazioni

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 L}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \Delta_2 L \quad , \quad \frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \Delta_2 M \quad , \quad \frac{\partial^2 N}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho} \Delta_2 N,$$

la velocità di propagazione essendo espressa, in questo caso, da

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}\,.$$

3. Identifichiamo la Terra con un solido elastico, limitato dalla superficie piana xy, indefinito nel senso delle z crescenti. Nel senso delle z negative esiste un mezzo incapace di reagire, l'atmosfera. Il fenomeno è supposto

interessare esclusivamente i punti del piano zx; pertanto, esso è indipendente da y.

Secondo l'ipotesi di Rayleigh, l'ampiezza del moto diminuisce con la profondità: esso quindi è smorzato normalmente alla direzione di propagazione.

Per le ipotesi fatte, le (2) si riducono a

$$(6)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{\partial\psi}{\partial x} - \dfrac{\partial M}{\partial z} \\[2ex] w = \dfrac{\partial\psi}{\partial x} + \dfrac{\partial M}{\partial z} . \end{cases}$$

u e w vanno intesi come risultanti delle variazioni provocate dai moti longitudinali $u_1 = \dfrac{\partial\psi}{\partial x}$, $w_1 = \dfrac{\partial\psi}{\partial z}$ e trasversali $u_2 = -\dfrac{\partial M}{\partial z}$ e $w_2 = \dfrac{\partial M}{\partial x}$; per cui

$$u = u_1 + u_2$$

$$w = w_1 + w_2 .$$

Consideriamo separatamente le onde di condensazione e di distorsione, da cui le onde di Rayleigh traggono origine.

Onde di condensazione (longitudinali). – Poniamo

$$(7)\qquad \psi = e^{-\gamma z} \cos (pt - fx),$$

essendo γ il coefficiente di estinzione verso l'interno del mezzo, $p = \dfrac{2\pi}{T}$ la pulsazione dell'onda piana considerata di periodo T e $f = \dfrac{2\pi}{\Lambda}$, dove Λ è la lunghezza d'onda. Avremo

$$(8)\qquad u_1 = fe^{-\gamma z} \sin (pt - fx) \quad , \quad w_1 = -\gamma e^{-\gamma z} \cos (pt - fx)$$

e quindi

$$\vartheta = (\gamma^2 - f^2)\, e^{-\gamma z} \cos (pt - fx).$$

Dalla (4), alla quale la ψ deve soddisfare come funzione caratteristica delle onde longitudinali, si ottiene

$$p^2 = v_1^2 (f^2 - \gamma^2).$$

Posto

$$(9)\qquad h^2 = f^2 - \gamma^2,$$

ne segue

$$(10)\qquad h^2 = \frac{p^2}{v_1^2} .$$

Poiché la direzione del movimento coincide con l'asse delle x, la velocità di propagazione del tipo d'onda considerato è espressa da

$$v_3 = \frac{p}{f} \cdot \tag{11}$$

Per γ variante da 0 a ∞, v_3 varia da v_1 a 0. Per $\gamma \to 0$, infatti, l'onda assegnata tende ad un'ordinaria onda longitudinale piana. Una prima delimitazione del campo di variabilità di v_3 è quindi dato dalla relazione

$$0 < v_3 < v_1 . \tag{12}$$

Assegnato il periodo T, è noto p. Restano a disposizione due grandezze arbitrarie, γ e f.

Onde di distorsione (*trasversali*). – Essendo l'onda di distorsione sfasata di $\pi/2$ rispetto a quella di condensazione (l'ampiezza della quale, per semplicità, si è posta uguale ad 1), possiamo scrivere, con manifesto significato dei simboli,

$$\mathrm{M} = \mathrm{E}\, e^{-\varepsilon z} \sin(pt - fx), \tag{13}$$

dove E è una costante ed ε il coefficiente di estinzione dell'onda considerata. Avremo

$$u_2 = \mathrm{E}\, \varepsilon e^{-\varepsilon z} \sin(pt - fx) \quad , \quad w_2 = - \mathrm{E}\, f e^{-\varepsilon z} \cos(pt - fx), \tag{14}$$

e quindi $\vartheta = 0$.

Dall'equazione del moto (5), posto

$$k^2 = f^2 - \varepsilon^2 , \tag{15}$$

si ottiene

$$k^2 = \frac{p^2}{v^2} \cdot \tag{16}$$

Al variare di ε da 0 a ∞, dalle (11) e (15) si deduce

$$0 < v_3 < v_2 , \tag{17}$$

che va considerato come effettivo campo di variazione per la velocità v_3.

Onde risultanti (onde di Rayleigh). – Sovrapponiamo i due sistemi di onde considerate, imponendo loro la stessa pulsazione p e la stessa velocità v_3; di conseguenza, il medesimo parametro f.

Delle quattro grandezze arbitrarie f, γ, ε, E, le prime tre – conformemente alle (9), (15) – sono legate dalle relazioni

$$f^2 = \varepsilon^2 + k^2 = \gamma^2 + h^2 .$$

Sul piano xy agiscono evidentemente le tensioni tangenziali T_1, T_2 e la tensione normale N_3. Poiché il fenomeno è indipendente dalla y ed è $v = 0$, ne consegue $T_1 \equiv 0$. D'altronde, la propagazione avviene alla superficie del mezzo, a contatto con l'atmosfera. Pertanto, dovrà risultare $N_3 = 0$, $T_2 = 0$; cioè, in forma esplicita,

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda\vartheta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Dalle (10), (15) consegue

$$\lambda = \mu\left(\frac{k^2}{h^2} - 2\right),$$

per cui le (18) si scrivono

$$\left\{\begin{aligned} &\left(\frac{k^2}{h^2} - 2\right)\vartheta + 2\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ &\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \end{aligned}\right. \tag{19}$$

Ricordiamo che le u, w risultano dalla somma dei contributi, legati alle onde longitudinali e trasversali conformemente alle (6), e tenute presenti le (8) e le (14).

Sul piano xy, cioè per $z = 0$, avremo pertanto

$$\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = (\gamma^2 - f^2)\cos(pt - fx).$$

Dalla 1ª delle (19) consegue allora, ricordando la (9),

$$E = -\frac{2f^2 - k^2}{2f\varepsilon}. \tag{20}$$

Dedotte le espressioni di $\frac{\partial u}{\partial z}$ e $\frac{\partial w}{\partial x}$ sul piano xy, dalla 2ª delle (19), ricordando la (15), si trae

$$E = -\frac{2f\gamma}{2f^2 - k^2}. \tag{21}$$

Le (20), (21) consentono l'eliminazione della E; il che permette di giungere all'equazione

$$\left(2 - \frac{k^2}{f^2}\right)^4 = 16\left(1 - \frac{h^2}{f^2}\right)\left(1 - \frac{k^2}{f^2}\right), \tag{22}$$

che, in forza delle (10), (11) e (16), può essere scritta sotto forma:

$$\left(2 - \frac{v_3^2}{v_2^2}\right)^4 = 16\left(1 - \frac{v_3^2}{v_1^2}\right)\left(1 - \frac{v_3^2}{v_2^2}\right). \tag{23}$$

È questa la celebre equazione di Rayleigh. Essa permette di determinare la velocità di fase delle onde di Rayleigh, una volta conosciute le velocità delle onde longitudinali e trasversali ordinarie proprie del mezzo, alla superficie del quale le onde in parola traggono origine.

4. È noto che il rapporto di Poisson σ varia fra 0 e 1/2. Nei calcoli, generalmente, si suole porre $\sigma = 1/4$, cui corrisponde $\lambda = \mu$. In questo caso, l'equazione di Rayleigh, fatto $k^2/f^2 = \frac{v_3^2}{v_2^2} = \chi$, diviene:

$$3\chi^3 - 24\chi^2 + 56\chi - 32 = 0.$$

Essa ha tutte e tre le radici reali:

$$\chi_1 = 4 \quad ; \quad \chi_2 = 3{,}1547 \quad ; \quad \chi_3 = 0{,}8453.$$

La condizione imposta dalla (17) fa sì che solo le radici reali minori dell'unità possono soddisfare il problema. Pertanto, nel caso considerato, la sola soluzione cui possono corrispondere onde di Rayleigh è quella per la quale

$$v_3 = 0{,}9194 \cdot v_2. \tag{24}$$

Le componenti del movimento complessivo, tenuto conto delle (8) e delle (14), sono:

$$\left\{ \begin{aligned} u &= (f e^{-\gamma z} + \mathrm{E}\varepsilon\, e^{-\varepsilon z}) \sin (pt - fx) \\ w &= (-\gamma e^{-\gamma z} - \mathrm{E} f e^{-\varepsilon z}) \cos (pt - fx). \end{aligned} \right. \tag{25}$$

Le (9), (15) e (21) consentono di determinare i valori di γ, ε ed E, una volta noto k^2/f^2. Per $\sigma = 1/4$, le (25) divengono allora

$$\left\{ \begin{aligned} u &= f\,(e^{-0{,}8475 fz} - 0{,}5773\, e^{-0{,}3933 fz}) \sin (pt - fx) \\ w &= f\,(-0{,}8475\, e^{-0{,}8475 fz} + 1{,}4678\, e^{-0{,}3933 fz}) \cos (pt - fx). \end{aligned} \right. \tag{26}$$

Essendo assegnati p e v_2, la v_3 è data dalla (24). Infine, la condizione $f = p/v_3$ consente la determinazione di f.

Alla superficie del mezzo ($z = 0$), il rapporto fra le ampiezze del movimento orizzontale e del movimento verticale diviene:

$$\left(\frac{u}{w}\right)_{z=0} = 0{,}6814. \tag{27}$$

Cioè, l'ampiezza del movimento verticale in un'onda di Rayleigh nel caso $\sigma = 1/4$ è circa una volta e mezza (precisamente 1,467) l'ampiezza del moto orizzontale.

Il movimento orizzontale si annulla quando

$$e^{-0{,}8475 fz} - 0{,}5773\, e^{-0{,}3933 fz} = 0,$$

cioè per

$$\underline{z = 0{,}1925\,\Lambda}\,.$$

Il moto orizzontale quindi interessa uno strato pari a 2/10 circa della lunghezza d'onda. Il movimento verticale invece non si annulla in nessun piano a distanza finita.

5. Nel numero precedente, per determinare il valore del rapporto fra le componenti orizzontale e verticale del movimento, provocato in superficie da un'onda di Rayleigh, abbiamo proceduto al graduale calcolo dei coefficienti, che figurano nelle equazioni (25). Ciò non è necessario. Lo scopo può essere raggiunto in modo più immediato.

Indichiamo con Γ_1, Γ_2 i valori dei coefficienti di $\sin(pt - fx)$ e $\cos(pt - fx)$ nelle (25) per $z = 0$. Avremo

$$\Gamma_1 = f + \mathrm{E}\varepsilon$$

$$\Gamma_2 = -\gamma - \mathrm{E}f.$$

L'annullarsi della tensione normale N_3 in superficie, ha condotto alla (20). Ne segue

$$\Gamma_1 = \frac{k^2}{2f} \cdot$$

Dalla (21), conseguente all'annullarsi in superficie della tensione tangenziale T_2, si trae

$$\Gamma_2 = \frac{k^2 \gamma}{2f^2 - k^2} \cdot$$

Avremo

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{2f^2 - k^2}{2f\gamma} \cdot$$

Ricordando che $\gamma = \sqrt{f^2 - k^2}$, dalle (10), (11) e (16) otteniamo

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{1 - \frac{1}{2}\frac{v_3^2}{v_2^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_3^2}{v_1^2}}} \cdot \tag{28}$$

D'altronde

$$\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{2(1-\sigma)}{1 - 2\sigma} \cdot$$

La (28) diviene quindi

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{1 - \frac{1}{2}\frac{v_3^2}{v_2^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_3^2}{v_2^2}\frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}}} \cdot \tag{29}$$

Per quanto mi consta, la (29) è una formula che figura per la prima volta, nella vasta letteratura sulle onde di Rayleigh. Assegnato un valore a σ compreso fra 0 e 1/2, e determinato con l'equazione di Rayleigh il corrispondente valore del rapporto v_3^2/v_2^2, la (29) consente di calcolare direttamente il valore del rapporto della componente orizzontale alla componente verticale dell'onda di Rayleigh, alla superficie del semispazio omogeneo.

6. Ricordiamo che vale l'uguaglianza:

$$\frac{v_3^2}{v_1^2} = \frac{v_3^2}{v_2^2}\,\frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\,.$$

Ciò permette di porre l'equazione di Rayleigh sotto la forma:

$$\left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right)\chi^3 - 8\left(\frac{\lambda}{\mu} + 2\right)\chi^2 + 8\left(3\,\frac{\lambda}{\mu} + 4\right)\chi - 16\left(\frac{\lambda}{\mu} + 1\right) = 0\,. \tag{30}$$

È facile vedere che la (30) ammette *sempre* una radice reale minore dell'unità.

Scegliamo alcuni valori di σ nel suo campo di variabilità. Determiniamo i corrispondenti valori del rapporto λ/μ, e per ognuno di essi risolviamo la (30) in χ. Ciò permetterà di ottenere i valori del rapporto v_3^2/v_2^2. La (29) consentirà allora di calcolare i relativi valori di Γ_1/Γ_2. La tabella riassume i risultati del calcolo per cinque valori di σ:

σ	1/2	1/3	1/4	3/14	0
λ/μ	∞	1,125	1	0,75	0
v_1/v_2	∞	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{11/2}$	$\sqrt{2}$
v_3/v_2	0,9554	0,9218	0,9194	0,9135	0,8741
Γ_1/Γ_2	0,5436	0,6481	0,6813	0,6982	0,7861

Dalla tabella si nota che, passando da un mezzo incompressibile ($\lambda = \infty$) ad un mezzo estremamente rigido, la velocità di fase delle onde di Rayleigh tende a diventare una frazione via via lievemente minore della velocità delle onde trasversali ordinarie, proprie del mezzo. Al contrario, il rapporto fra la componente orizzontale e la componente verticale del movimento, associato ad un'onda di Rayleigh, pur restando sempre minore dell'unità, tende a crescere passando dall'incompressibilità alla rigidità estrema.

7. In superficie, le (25) possono essere scritte

$$\begin{cases} u = \Gamma_1 \sin(pt - fx) \\ w = \Gamma_2 \cos(pt - fx)\,. \end{cases} \tag{31}$$

Sia la proiezione orizzontale che quella verticale dello spostamento di una particella raggiunta da un'onda di Rayleigh, seguono quindi la legge delle oscillazioni armoniche; fra i due movimenti però esiste una differenza di fase di $\pi/2$ così che, per esempio, mentre u raggiunge il massimo w si annulla, e viceversa.

Lo spostamento orizzontale u coincide con la direzione di propagazione delle onde superficiali; lo spostamento verticale risulta invece normale a questa direzione. Abbiamo quindi la sovrapposizione di due tipi d'onda, longitudinale e trasversale, i quali, contrariamente a quanto avviene nella loro propagazione nell'interno della Terra, nel costituire, accoppiati, il nuovo sistema d'onde, si propagano lungo la superficie terrestre con velocità costante v_3.

Dalla (31) segue

$$\frac{u^2}{\Gamma_1^2} + \frac{w^2}{\Gamma_2^2} = 1 ,$$

cioè, una particella della superficie, raggiunta dalla sollecitazione elastica, associata ad un'onda di Rayleigh, descrive, sotto la sua azione, una ellisse di semiassi Γ_1 e Γ_2.

Il rapporto dei semiassi, come si è visto, è dato dalla (29).

Le onde studiate teoricamente da Rayleigh, nel 1885, sono state successivamente identificate nelle onde superficiali di un sismogramma, costituenti la così detta fase massima. L'identificazione però – a differenza di quanto avviene per le onde di Love, coincidenti con l'inizio delle onde superficiali – non è esente da obiezioni. Le principali sono le seguenti: 1ª le onde della fase massima non sempre oscillano nel piano principale; 2ª raramente, nelle onde della fase massima, la componente verticale del movimento supera la componente orizzontale: ad ogni modo, il rapporto fra le due componenti non è costante e non raggiunge il valore di 1,5 circa, richiesto dalla teoria per $\sigma = \frac{1}{4}$: 3ª le onde della fase massima, come le altre onde superficiali, subiscono la dispersione normale.

Alla prima obiezione si suole rispondere che, sovrapposte alle onde di Rayleigh, possono propagarsi anche onde di Love. Per risolvere la seconda obiezione sono state compiute numerosissime ricerche, estendendo la teoria di Rayleigh a mezzi elastici stratificati [3] o a mezzi non esclusivamente elastici, particolarmente a mezzi che ammettano attrito interno [4]. I tentativi non hanno però sortito risultati del tutto soddisfacenti: l'obiezione pertanto è solo in parte rimossa. La terza obiezione si supera considerando la propagazione delle onde di Rayleigh in mezzi elastici, che ammettono attrito interno (mezzi firmo–elastici) [5–6].

In ogni modo, la classica teoria di Rayleigh è stata una delle più feconde di ricerche della geofisica, avendo dato origine ad una serie di innumerevoli, pregevolissimi lavori di carattere fisico–matematico, spesso ai limiti delle possibilità analitiche [2].

L'originale teoria di Rayleigh, per quanto concerne la propagazione delle onde da lui previste nella Terra, rappresenta un'approssimazione accettabile solo per oscillazioni di molto breve lunghezza d'onda. La stratificazione della crosta terrestre, infatti, comporta, fra i principali effetti, la dispersione e l'insorgere di un infinito numero di modi di propagazione [7].

La propagazione delle onde di Rayleigh, è stata studiata anche per mezzi stratificati non esclusivamente elastici [8].

In una successiva Nota, prenderemo in esame la possibilità di un diverso meccanismo di formazione di onde superficiali, come risultato dell'accoppiamento di onde longitudinali e trasversali ordinarie.

BIBLIOGRAFIA.

[1] LORD RAYLEIGH, *On waves propagated along the plane surface of an elastic solid*, « Scientific Papers », II.

[2] H. NAKANO, *On Rayleigh Waves*, « Jap. Journ. Astron. and. Geophys. », II–5 (1925).

[3] T. SUZUKI, *Amplitude of Rayleigh–waves on the Surface of a Stratified Medium*, « Bull. Earthq. Res. Inst. », II (1933).

[4] P. CALOI, *Comportamento delle onde di Rayleigh in un mezzo firmo–elastico indefinito*, « Ann. Geofis. », 1–4 (1948).

[5] P. CALOI, *Teoria delle Onde di Rayleigh in Mezzi elastici e firmo–elastici, esposta con le Omografie vettoriali*, « Archiv. f. Meteor., Geophys. u. Bioklim. », IV (1951).

[6] P. CALOI, *L'effetto della firmo–viscosità sulla risultante del movimento associato alle onde di Rayleigh*, « Accademia Naz. dei Lincei, Rend. Cl. Sc. fis., mat. e nat. », ser. VIII, vol. XXIX, fasc. 6 (1960).

[7] M. EWING, W. JARDETZKY e F. PRESS, *Elastic Waves in Layered Media*. New York, Toronto, London (1957).

[8] P. CALOI, *Sulla propagazione delle onde di Rayleigh in un mezzo elastico firmo–viscoso stratificato*, « Acc. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sc. fis. mat. e nat. », ser. VIII, vol. I, fasc. 6 (1946).