Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Giorgio Ferrarese

Sulla relazione simbolica della meccanica delle volte

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.1, p. 35–40.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_1_35_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1967.

Meccanica. — *Sulla relazione simbolica della meccanica delle volte*. Nota di GIORGIO FERRARESE, presentata (*) dal Socio G. KRALL.

SUMMARY. — The dynamic boundary conditions are deduced for a shell constrained by the Kirchhoff assumption only, and a symbolic relation is also established for the mechanics of a shell.

Riprendendo uno studio [2] sulla problematica delle volte, si completano le equazioni di equilibrio – pur esse suscettibili della tipica forma vettoriale di una equazione di conservazione – precisando le *quattro* condizioni al bordo della superficie mediana della volta.

L'equazione indefinita e le condizioni al contorno vengono quindi riassunte in un'unica relazione scalare, valida per ogni spostamento virtuale (1): la *relazione simbolica della meccanica delle volte* (2).

I. PREMESSE E RICHIAMI. – Ferme restando tutte le notazioni della Nota [2], si riprendano le equazioni fondamentali della meccanica delle volte:

$$
(1) \qquad \begin{cases} \mu \boldsymbol{f} - \dfrac{1}{\sqrt{A}} \partial_i (\sqrt{A}\, \mathbf{R}^i) = 0 \quad , \quad \boldsymbol{m} - \boldsymbol{e}_i \wedge \mathbf{R}^i - \dfrac{1}{\sqrt{A}} \partial_i (\sqrt{A}\, \mathbf{M}^i) = 0 \cdots \Sigma \\ \boldsymbol{\varphi} - \nu_i \mathbf{R}^i = 0 \quad , \quad \boldsymbol{\vartheta} - \nu_i \mathbf{M}^i = 0 \cdots l , \end{cases}
$$

quali risultano dalla relazione simbolica della meccanica dei sistemi continui tridimensionali

$$
(2) \qquad \partial \mathfrak{L}^{(e)} + \partial \mathfrak{L}^{(\text{in.})} \equiv \int_C k\mathbf{F} : \partial \mathrm{P}\, d\mathrm{C} + \int_{\mathfrak{F}\mathrm{C}} \mathbf{Y} \cdot \partial \mathrm{P}\, d\, \mathfrak{F}\mathrm{C} + \int_C \mathbf{Y}^\alpha \cdot \partial_\alpha (\partial \mathrm{P})\, d\mathrm{C} = 0 .
$$

Nella (1) sono indicati con: (x^i) coordinate molecolari generiche dei punti della superficie mediana Σ; $\boldsymbol{\nu}$ il versore della normale geodetica interna al contorno l; A il determinante della metrica A_{ik} di Σ; $\mu \boldsymbol{f}$ ed $\boldsymbol{m}$ rispettivamente la forza e il momento di massa ripartiti su Σ, $\boldsymbol{\varphi}$ e $\boldsymbol{\vartheta}$ la forza e il momento superficiale esterno, ripartiti sul bordo l:

$$
(3) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{f} = f^i \boldsymbol{e}_i + f\boldsymbol{n} \quad , \quad \boldsymbol{m} = \boldsymbol{n} \wedge m^i \boldsymbol{e}_i \\ \boldsymbol{\varphi} = \varphi^i \boldsymbol{e}_i + \varphi \boldsymbol{n} \quad , \quad \boldsymbol{\vartheta} = \boldsymbol{n} \wedge \vartheta^i \boldsymbol{e}_i ; \end{cases}
$$

(*) Nella seduta del 12 novembre 1966.

(1) Si vuol dire uno spostamento che rispetti l'ipotesi di Kirchhoff sulle normali alla superficie mediana Σ della volta. Come tale esso si ottiene fissando su Σ lo spostamento dei singoli punti e sul contorno l lo spostamento e la rotazione normale (a l su Σ).

(2) Una relazione analoga, per la teoria *linearizzata*, figura in [1], p. 133.

infine $\mathbf{R}^i$ ed $\mathbf{M}^i$ gli sforzi e i momenti di sforzo ripartiti su Σ:

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathbf{R}^i \equiv \mathrm{R}^{ik}\,\boldsymbol{e}_k + \mathrm{R}^i\,\boldsymbol{n} = \displaystyle\int_{-h}^{h} \mathfrak{D}\mathbf{Y}^i\,dz \\ \mathbf{M}^i \equiv \boldsymbol{n} \wedge \mathrm{M}^{ik}\,\boldsymbol{e}_k = \boldsymbol{n} \wedge \displaystyle\int_{-h}^{h} z\mathfrak{D}\,\mathbf{Y}^i\,dz \end{cases} \qquad (i = 1\,,\,2)\,,$$

costruiti a partire dai due vettori di C

$$(5)\qquad \mathfrak{D}\mathbf{Y}^i \equiv (1 + z\mathcal{H})\,\beta\boldsymbol{e}^i - z\mathrm{B}_k{}^i\,\beta\boldsymbol{e}^k \qquad (\mathfrak{D} \equiv 1 + \mathcal{H}z + \mathcal{K}z^2)\,,$$

essendo β l'omografia di tensione, $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$ le curvature media e totale di Σ, B_{ik} i coefficienti della seconda forma quadratica di Σ.

2. EQUAZIONE INDEFINITA DELLA MECCANICA DELLE VOLTE E CONDIZIONI AL CONTORNO. – Nelle equazioni (I) figurano *dieci* caratteristiche globali dello stress: R^{ik}, R^i ed M^{ik} $(i\,,\,k = 1\,,\,2)$, tutte costruite a partire dal tensore degli sforzi di C, notoriamente *simmetrico*. È proprio tale simmetria che dà luogo, per integrazione rispetto a z, alla condizione globale

$$(6)\qquad \boldsymbol{e}_i \wedge (\mathrm{R}^{ik} - \mathrm{B}_r{}^k\,\mathrm{M}^{ri})\,\boldsymbol{e}_k = 0 \cdots \Sigma,$$

ovvero

$$(6')\qquad \mathrm{N}^{ik} \equiv \mathrm{R}^{ik} - \mathrm{B}_r{}^k\,\mathrm{M}^{ri} = \mathrm{N}^{ki}.$$

La simmetria del tensore superficiale N^{ik} viene del resto confermata dalla $(1)_2$ che si spezza nella (6) e nella ulteriore condizione

$$(7)\qquad \mathrm{R}^i\,\boldsymbol{e}_i = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}}\,\partial_i\,(\sqrt{\mathrm{A}}\,\mathrm{M}^{ik}\,\boldsymbol{e}_k) - m^i\,\boldsymbol{e}_i\,.$$

Decomposto allora il tensore superficiale M^{ik} nelle sue due parti, simmetrica e antisimmetrica,

$$(8)\qquad \mathrm{M}^{ik} \equiv \mathrm{S}^{ik} + \Omega^{ik},$$

la $(4)_1$, tenuto anche conto della (6'), dà luogo alla seguente espressione di $\mathbf{R}^i$:

$$\mathbf{R}^i = \mathrm{N}^{ik}\,\boldsymbol{e}_k + (\mathrm{S}^{ki} + \Omega^{ki})\,\partial_k\,\boldsymbol{n} + \left\{\frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}}\,\partial_k\,[\sqrt{\mathrm{A}}\,(\mathrm{S}^{kr} + \Omega^{kr})\,\boldsymbol{e}_r]\cdot\boldsymbol{e}^i - m^i\right\}\boldsymbol{n},$$

ovvero [(3)]

$$(9)\qquad \mathbf{R}^i = \mathbf{P}^i - m^i\,\boldsymbol{n} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}}\,\partial_k\,(\sqrt{\mathrm{A}}\,\Omega^{ki}\,\boldsymbol{n})\,,$$

(3) Si utilizza l'identità $\mathrm{S}^{kr}\,\partial_k\boldsymbol{e}_r = 0$, conseguente all'antisimmetria di S^{ik} e si tiene conto che $\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}^i = \delta_r{}^i$.

ove si è posto

$$\mathbf{P}^i \equiv \mathrm{N}^{ik} \boldsymbol{e}_k + \mathrm{S}^{ik} \partial_k \boldsymbol{n} + \frac{\boldsymbol{n}}{\sqrt{\mathrm{A}}} \partial_k (\sqrt{\mathrm{A}}\, \mathrm{S}^{kr} \boldsymbol{e}_r) \cdot \boldsymbol{e}^i. \tag{10}$$

Pertanto la $(1)_1$ dà luogo alla seguente *equazione vettoriale indefinita della meccanica delle volte* [4]:

$$\boldsymbol{p} - \frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}} \partial_i (\sqrt{\mathrm{A}}\, \mathbf{P}^i) = 0 \cdots \Sigma, \tag{11}$$

essendo

$$\boldsymbol{p} \equiv \mu \boldsymbol{f} + \frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}} \partial_i (\sqrt{\mathrm{A}}\, m^i \boldsymbol{n}). \tag{12}$$

Si noti che nella (11) le forze e i momenti di massa superficiali sono rappresentati dal vettore $\boldsymbol{p}$, mentre lo stress interviene, per il tramite di $\mathbf{P}^i$, *solo attraverso le densità tensoriali simmetriche* $\sqrt{\mathrm{A}}\, \mathrm{N}^{ik}$ e $\sqrt{\mathrm{A}}\, \mathrm{S}^{ik}$, come dalla (10).

Per ottenere le condizioni al contorno da associare alla (11), basta evidentemente eliminare, dalle $(1)_{3,4}$, lo stress *reattivo* Ω^{ik}. A questo scopo cominciamo con l'introdurre il tensore di Ricci su Σ

$$\eta_{ik} \equiv \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{n} \qquad (i, k = 1, 2) \tag{13}$$

nonché, sul contorno l di Σ, il versore della tangente $\boldsymbol{t}$, orientato con la condizione che la terna $(\boldsymbol{t}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{n})$ sia levogira [5]:

$$t^i = \eta^{ik} \nu_k \Longleftrightarrow \nu^i = \eta^{ki} t_k. \tag{14}$$

Col tensore di Ricci si può costruire il duale di Ω^{ik}, cioè lo scalare

$$\Omega \equiv \frac{1}{2} \eta_{ik} \Omega^{ik} \Longleftrightarrow \Omega^{ik} \equiv \Omega \eta^{ik}, \tag{15}$$

con che la (9) diviene [6]

$$\mathbf{R}^i = \mathbf{P}^i - m^i \boldsymbol{n} + \eta^{ki} \partial_k (\Omega \boldsymbol{n}). \tag{9'}$$

D'altra parte sul contorno di Σ è da intendere $m^i = 0$, sì che le $(1)_{3,4}$ non differiscono da

$$\boldsymbol{\varphi} - \nu_i \mathbf{P}^i - t^k \partial_k (\Omega \boldsymbol{n}) = 0 \quad , \quad \vartheta^k - \nu_i \mathrm{S}^{ik} + \Omega t^k = 0 \cdots l.$$

Di qui, eliminando la reazione Ω:

$$-\Omega = (\vartheta^k - \nu_i \mathrm{S}^{ik})\, t_k \cdots l, \tag{16}$$

si ricavano le *quattro* condizioni al contorno da associare alla (II).

(4) Essa sintetizza le tre equazioni scalari (40) della [2], per altro analoghe a quelle linearizzate di BUDIANSKY e SANDERS [1]. Si noti che queste ultime differiscono dalle equazioni di KOITER [3] per la sostituzione di N^{ik} ed S^{ik} con

$$n^{ik} \equiv -\mathrm{N}^{ik} - \frac{1}{2} (b_r{}^i \mathrm{S}^{rk} + b_r{}^k \mathrm{S}^{ri}) \quad \text{e} \quad m^{ik} \equiv -\mathrm{S}^{ik}.$$

(5) Si ha $\boldsymbol{t} \wedge \boldsymbol{\nu} \equiv t^i \nu^k \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_k = t^i \nu^k \eta_{ik} \boldsymbol{n} = t^i t_i \boldsymbol{n} = \nu_k \nu^k \boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}$.

(6) Essendo il tensore di Ricci a derivata covariante nulla, è anche

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{A}}} \partial_k (\sqrt{\mathrm{A}}\, \eta^{ki}) \equiv \eta^{ki}{}_{/k} = 0.$$

In definitiva le equazioni della meccanica delle volte si riassumono nel seguente sistema:

$$(17)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{p} - \dfrac{1}{\sqrt{A}}\,\partial_i\,(\sqrt{A}\,\mathbf{P}^i) = 0 \cdots \Sigma \\[2ex] \boldsymbol{\varphi} - \nu_i\,\mathbf{P}^i + \dfrac{d}{ds}\,[(\vartheta_t - S^{ik}\,\nu_i\,t_k)\,\boldsymbol{n}] = 0 \quad , \quad \vartheta_\nu - S^{ik}\,\nu_i\,\nu_k = 0 \cdots l, \end{cases}$$

ove si è posto, per il momento esterno al bordo,

$$(18)\qquad \vartheta^k\,\boldsymbol{e}_k = \vartheta_t\,\boldsymbol{t} + \vartheta_\nu\,\boldsymbol{\nu}.$$

Si noti che la reazione Ω, pur essendo completamente arbitraria su Σ, è sul contorno condizionata dal legame (16) e pertanto non può generalmente ritenersi nulla, come erroneamente si ammette in [3].

3. Relazione simbolica della meccanica delle volte. – Dalla relazione simbolica della meccanica dei continui (2) si può dedurre, come è naturale, una relazione scalare atta a sintetizzare il sistema (17). Per riconoscerlo, specializziamo nella (2) lo spostamento nominale, assumendo per ∂P il generico spostamento virtuale della volta: $\delta P \equiv \delta Q + z\,\delta\boldsymbol{n}$. Tralasciando l'ultimo integrale, corrispondente al lavoro delle forze intime (7):

$$(19)\qquad \delta\mathfrak{L}^{(\text{in.})} \equiv \int_\Sigma \left(\frac{1}{2}\,N^{ik}\,\delta A_{ik} + S^{ik}\,\delta B_{ik}\right) d\Sigma \qquad (d\Sigma = \sqrt{A}\,dx^1\,dx^2),$$

consideriamo i primi due integrali, cioè il lavoro complessivo delle forze esterne. Con le notazioni già introdotte si ha intanto:

$$\delta\mathfrak{L}^{(e)} \equiv \int_\Sigma (\mu\boldsymbol{f}\cdot\delta Q + m^i\,\boldsymbol{e}_i\cdot\delta\boldsymbol{n})\,d\Sigma + \int_l (\boldsymbol{\varphi}\cdot\delta Q + \vartheta^i\,\boldsymbol{e}_i\cdot\delta\boldsymbol{n})\,ds.$$

D'altra parte la rotazione $\delta\boldsymbol{n}$ non è indipendente dallo spostamento del punto generico della superficie mediana della volta. Precisamente si ha, insieme a $\delta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n} = 0$, $\delta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_i = -\boldsymbol{n}\cdot\delta\boldsymbol{e}_i$, ovvero

$$(20)\qquad \delta\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_i = -\boldsymbol{n}\cdot\partial_i\,(\delta Q);$$

quindi

$$(21)\qquad \delta\boldsymbol{n} = \delta\Phi_i\,\boldsymbol{e}^i$$

con

$$(22)\qquad \delta\Phi_i = \partial_i\,\boldsymbol{n}\cdot\delta Q - \partial_i\,(\boldsymbol{n}\cdot\delta Q).$$

Si ha pertanto, come dalla (20) (8),

$$\int_\Sigma m^i\,\boldsymbol{e}_i\cdot\delta\boldsymbol{n}\,d\Sigma = -\int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{A}}\,\partial_i\,(\sqrt{A}\,m^i\,\boldsymbol{n}\cdot\delta Q)\,d\Sigma + \\ + \int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{A}}\,\partial_i\,(\sqrt{A}\,m^i\,\boldsymbol{n})\cdot\delta Q\,d\Sigma = \int_\Sigma \frac{1}{\sqrt{A}}\,\partial_i\,(\sqrt{A}\,m^i\,\boldsymbol{n})\cdot\delta Q\,d\Sigma$$

(7) Cfr. [2] p. 825.

(8) Applicando il teorema della divergenza, si tien conto che su l $m^i = 0$.

nonché, avuto riguardo alla (18),

$$(23)\qquad \int_l \vartheta^i\, \boldsymbol{e}_i\cdot\delta\boldsymbol{n}\,ds = \int_l \left[\vartheta_\nu\, \boldsymbol{\nu}\cdot\delta\boldsymbol{n} - \vartheta_t\, \boldsymbol{n}\cdot\frac{d}{ds}(\delta Q)\right] ds = \int_l \vartheta_\nu\,\delta\Phi_\nu\,ds - \vartheta_t\,\boldsymbol{n}\cdot\delta Q\,\Big| + \\ + \int_l \frac{d(\vartheta_t\,\boldsymbol{n})}{ds}\cdot\delta Q\,ds\,,$$

ove si è posto

$$(24)\qquad \delta\Phi_\nu \equiv \boldsymbol{\nu}\cdot\delta\boldsymbol{n} = \nu^i\,\delta\Phi_i\,.$$

Segue di qui, supponendo per semplicità l chiusa,

$$(25)\qquad \delta\mathfrak{L}^{(e)} \equiv \int_\Sigma \boldsymbol{p}\cdot\delta Q\,d\Sigma + \int_l \left[\varphi + \frac{d(\vartheta_t\,\boldsymbol{n})}{ds}\right]\cdot\delta Q\,ds + \int_l \vartheta_\nu\,\delta\Phi_\nu\,ds\,;$$

ciò che dà, con la (19), la seguente *relazione simbolica della meccanica delle volte*:

$$(26)\qquad \int_\Sigma \boldsymbol{p}\cdot\delta Q\,d\Sigma + \int_l \left[\varphi + \frac{d(\vartheta_t\,\boldsymbol{n})}{ds}\right]\cdot\delta Q\,ds + \int_l \vartheta_\nu\,\delta\Phi_\nu\,ds + \\ + \int_\Sigma \left(\frac{1}{2}\,N^{ik}\,\delta A_{ik} + S^{ik}\,\delta B_{ik}\right) d\Sigma = 0.$$

Come è naturale, la relazione scalare (26), supposta valida per *ogni* spostamento virtuale della volta, cioè per ogni scelta di δQ su Σ e di δQ e $\delta\Phi_\nu$ su l (9), è equivalente al sistema (17). Per convincersene, trasformiamo il lavoro delle forze intime (19) tenendo conto delle espressioni di δA_{ik} e δB_{ik} (caratteristiche linearizzate di deformazione, relative al passaggio da Σ a $\Sigma + \delta\Sigma$):

$$(27)\qquad \begin{cases} \delta A_{ik} \equiv \delta(\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_k) = \partial_i(\delta Q)\cdot\boldsymbol{e}_k + \partial_k(\delta Q)\cdot\boldsymbol{e}_i \\ \delta B_{ik} \equiv \delta(\partial_i\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{e}_k) = \partial_i(\delta\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{e}_k + \partial_i\boldsymbol{n}\cdot\partial_k(\delta Q)\,. \end{cases}$$

Si ha

$$\delta\mathfrak{L}^{(\mathrm{in.})} \equiv \int_\Sigma \left[N^{ik}\,\boldsymbol{e}_k\cdot\partial_i(\delta Q) + S^{ik}\,\boldsymbol{e}_k\cdot\partial_i(\delta\boldsymbol{n}) + S^{ik}\,\partial_i\boldsymbol{n}\cdot\partial_k(\delta Q)\right] d\Sigma =$$

$$= \int_\Sigma \left[(N^{ik}\,\boldsymbol{e}_k + S^{ik}\,\partial_k\boldsymbol{n})\cdot\partial_i(\delta Q) + \frac{1}{\sqrt{A}}\,\partial_i(\sqrt{A}\,S^{ik}\,\boldsymbol{e}_k\cdot\delta\boldsymbol{n}) - \frac{1}{\sqrt{A}}\,\partial_i(\sqrt{A}\,S^{ik}\,\boldsymbol{e}_k)\cdot\delta\boldsymbol{n}\right] d\Sigma$$

cioè, tenuto conto, per l'ultimo termine, dell'identità $\delta\boldsymbol{n} = -[\boldsymbol{n}\cdot\partial_i(\delta Q)]\,\boldsymbol{e}^i$ e della (10):

$$\delta\mathfrak{L}^{(\mathrm{in.})} \equiv \int_\Sigma \mathbf{P}^i\cdot\partial_i(\delta Q)\,d\Sigma - \int_l \nu_i\,S^{ik}\,\boldsymbol{e}_k\cdot\delta\boldsymbol{n}\,ds\,.$$

(9) Si noti esplicitamente che assegnare δQ e $\delta\Phi_\nu$ sul contorno l equivale ad assegnare δQ e la derivata di $\boldsymbol{n}\cdot\delta Q$ (componente normale dello spostamento) secondo $\boldsymbol{\nu}$, in quanto si ha, come dalle (22) e (24): $\delta\Phi_\nu \equiv -\nu^i\,\partial_i(\boldsymbol{n}\cdot\delta Q) + \nu^i\,\partial_i\boldsymbol{n}\cdot\delta Q$.

Trasformando ancora il primo integrale col lemma di Green e procedendo, per il secondo, come per l'integrale analogo (23), si ha

$$\delta\mathcal{L}^{(\text{in.})} \equiv -\int_{\Sigma} \frac{1}{\sqrt{A}}\, \partial_i (\sqrt{A}\,\mathbf{P}^i)\cdot \delta Q\, d\Sigma -$$

$$-\int_{l} \left\{ \left[\nu_i \mathbf{P}^i + \frac{d}{ds} (\nu_i S^{ik} t_k \boldsymbol{n}) \right] \cdot \delta Q + \nu_i S^{ik} \nu_k \delta\Phi_\nu \right\} ds ;$$

sì che la relazione simbolica (26) può anche scriversi così:

$$\int_{\Sigma} \left[\boldsymbol{p} - \frac{1}{\sqrt{A}}\, \partial_i (\sqrt{A}\,\mathbf{P}^i) \right] \cdot \delta Q\, d\Sigma + \tag{26'}$$

$$+\int_{l} \left\{ \varphi - \nu_i \mathbf{P}^i + \frac{d}{ds} [(\vartheta_t - S^{ik} \nu_i t_k)\, \boldsymbol{n}] \right\} \cdot \delta Q\, ds + \int_{l} (\vartheta_\nu - S^{ik} \nu_i \nu_k)\, \delta\Phi_\nu\, ds = 0 .$$

Stante l'arbitrarietà del vettore δQ su tutta Σ, di δQ e $\delta\Phi_\nu$ su l, si riconosce a vista sulla (26′) l'asserita equivalenza della (26) al sistema (17).

Le equazioni (17) o la corrispondente relazione scalare (26), sussistono per una generica volta, sono cioè il risultato della schematizzazione di una volta in un sistema continuo *vincolato* a deformarsi compatibilmente con l'ipotesi di Kirchhoff. Nessuna altra restrizione è imposta, né per le coordinate o per lo stress, né per lo spessore o la costituzione materiale della volta, né per le trasformazioni cui si intende soggetta (reversibili o non, infinitesime).

Per un sistema a trasformazioni reversibili, in particolare per una volta elastica, rimane il problema della scelta del potenziale termodinamico. L'espressione (19) del lavoro delle forze intime suggerisce infatti, per questo, solo la dipendenza da certe variabili. Le direttive non possono essere fornite che dalla teoria tridimensionale. In un Nota successiva sarà considerato il problema linearizzato.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI.

[1] BUDIANSKY B. e SANDERS J. L., *On the best first-order linear shell theory*, in « Progress in Applied Mechanics », The MacMillan Company, New York (1962), p. 129.

[2] FERRARESE G., *Contributi alla teoria matematica delle volte*, « Rend. Acc. Lincei », maggio 1966.

[3] KOITER W. T., *On the dynamic boundary conditions in the theory of thin shells*, « Proc. Kon. Ned. Ak. Wet. Amsterdam », B 67, 124 (1964).