Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gaetano Caricato

Sul problema intrinseco di evoluzione per le equazioni einsteiniane. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.1, p. 46–52.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_1_46_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Fisica matematica. — *Sul problema intrinseco di evoluzione per le equazioni einsteiniane* (*). Nota II di GAETANO CARICATO, presentata (**) dal Corrisp. C. CATTANEO.

SUMMARY. — An integration method established by Mme Bruhat is here adapted to the reduced problem of evolution for the vacuum Einstein's equations. The applicability of the method needs three suitable supplementary conditions on the Cauchy's data.

In precedenti Note [1] ho formulato intrinsecamente il problema ristretto di evoluzione per le equazioni gravitazionali nel vuoto, dimostrando l'esistenza e l'unicità della sua soluzione anche per dati non analitici. In questa dimostrazione una parte essenziale ha avuto un teorema di esistenza e unicità, stabilito da Y. Bruhat [2] per una certa classe di equazioni differenziali, e da lei applicato all'intero blocco delle equazioni gravitazionali espresse in coordinate armoniche.

Questo teorema è stato da me utilizzato *indirettamente*, mediante una trasformazione da coordinate armoniche a coordinate adattate al generico riferimento fisico prescelto. Nella Nota presente mostrerò come il suddetto teorema di Y. Bruhat si possa, *sotto alcune limitazioni aggiuntive dei dati di Cauchy*, applicare direttamente al problema ristretto di evoluzione, fornendo così anche un vero procedimento costruttivo della soluzione cercata. Le condizioni aggiuntive, che assicurano l'applicabilità del procedimento, risultano identicamente soddisfatte nel caso di dati iniziali di tipo rigido (cui però generalmente corrisponde una soluzione *non* rigida).

1. *Problema di evoluzione ridotto.* Il sistema di equazioni alle derivate parziali che regge il problema ristretto di evoluzione [L. I. (4)] assume una forma notevolmente più semplice quando il campo di vettori ausiliari [3] $\eta_i(x)$, largamente arbitrario, viene scelto con le prime tre componenti $\eta_\alpha(x)$ iden-

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di ricerca matematica n. 36 del Consiglio Nazionale delle Ricerche.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1967.

(1) *Sul problema di Cauchy per le equazioni gravitazionali nel vuoto*, « Rendiconti di Matematica » (3–4), *22* (1963); questa Nota verrà nel seguito indicata con (R. M.). *Sul problema intrinseco di evoluzione per le equazioni einsteiniane*. Nota I, « Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei », (VIII), *41*, 1966; questa Nota, verrà indicata con (L. I.).

(2) *Theorème d'existence pour certains systèmes d'equations aux dérivées partielles non lineaires*, « Acta Mathematica », *88*, 141–219 (1952).

(3) Rinvio alle Note citate in [1] per chiarire il significato di enti, locuzioni e simboli che furono già ivi adoperati. Ricordo qui soltanto la convenzione adottata per gli indici: quelli greci, $\alpha, \beta, \gamma \cdots$ variano da 1 a 3, quelli latini, $i, k, r \cdots$ da 1 a 4.

ticamente nulle. Con tale scelta le equazioni di evoluzione diventano

$$(\mathrm{I})\qquad 2\,(s_{\alpha\beta})_{\eta_\nu=0} \equiv -\gamma^{\varrho\sigma}\,\partial_\varrho\,\partial_\sigma\,\gamma_{\alpha\beta} + (\gamma^4)^2\,\partial_4\,\partial_4\,\gamma_{\alpha\beta} + \gamma^{\varrho\sigma}\,\partial_\alpha\left(\partial_\varrho\,\gamma_{\beta\sigma} - \frac{1}{2}\,\partial_\beta\,\gamma_{\sigma\varrho}\right) + $$
$$+\,\gamma^{\varrho\sigma}\,\partial_\beta\left(\partial_\sigma\,\gamma_{\alpha\varrho} - \frac{1}{2}\,\partial_\alpha\,\gamma_{\varrho\sigma}\right) - (h_{\alpha\beta})_{\eta_\nu=0} = 0$$

ove le $(h_{\alpha\beta})_{\eta_\nu=0}$ sono funzioni razionali ben determinate delle $\gamma_{\mu\nu}$, $\partial_r\,\gamma_{\mu\nu}$, e le $\gamma^{\varrho\sigma}$ sono definite dalle relazioni $\gamma^{\varrho\sigma}\cdot\gamma_{\sigma\beta} = \delta^\varrho{}_\beta$. Il problema di evoluzione così espresso verrà chiamato problema di evoluzione *ridotto*.

Posto

$$(2)\qquad u^\sigma \equiv \gamma^{\lambda\mu}\,(\tilde{\nabla}^*_\lambda\,\tilde{\nabla}^*_\mu\,x^\sigma)_{\eta_\nu=0} \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\,\partial_\varrho\,(\sqrt{\gamma}\cdot\gamma^{\varrho\sigma}) \qquad (\gamma = \det.\,\|\gamma_{\alpha\beta}\|),$$

e tenendo conto delle identità [4]

$$(3)\qquad \gamma^{\varrho\sigma}\left(\partial_\varrho\,\gamma_{\sigma\beta} - \frac{1}{2}\,\partial_\beta\,\gamma_{\varrho\sigma}\right) = -\left[\gamma_{\sigma\beta}\,\partial_\varrho\,\gamma^{\sigma\varrho} + \left\{ {\tilde{\nu} \atop \beta\nu} \right\}^*_{\eta_\nu=0}\right] =$$
$$-\,\gamma_{\beta\sigma}\left[\partial_\varrho\,\gamma^{\varrho\sigma} + \left\{ {\tilde{\nu} \atop \nu\mu} \right\}^*_{\eta_\nu=0}\cdot\gamma^{\mu\sigma}\right] = -\,\gamma_{\beta\sigma}\,u^\sigma\,,$$

le (1) assumono la forma seguente:

$$(\mathrm{I})'\quad 2\,(s_{\alpha\beta})_{\eta_\nu=0} \equiv -\gamma^{\varrho\sigma}\,\partial_\varrho\,\partial_\sigma\,\gamma_{\alpha\beta} + (\gamma^4)^2\,\partial_4\,\partial_4\,\gamma_{\alpha\beta} - (\gamma_{\beta\nu}\,\partial_\alpha\,u^\nu + \gamma_{\alpha\nu}\,\partial_\beta\,u^\nu) - q_{\alpha\beta} = 0$$

con

$$q_{\alpha\beta} = (h_{\alpha\beta})_{\eta_\nu=0} + u^\sigma\,\partial_\alpha\,\gamma_{\beta\sigma} + u^\varrho\,\partial_\beta\,\gamma_{\alpha\varrho} + \partial_\alpha\,\gamma^{\varrho\sigma}\left(\partial_\varrho\,\gamma_{\beta\sigma} - \frac{1}{2}\,\partial_\beta\,\gamma_{\sigma\varrho}\right) +$$
$$+\,\partial_\beta\,\gamma^{\varrho\sigma}\left(\partial_\sigma\,\gamma_{\alpha\varrho} - \frac{1}{2}\,\partial_\alpha\,\gamma_{\varrho\sigma}\right).$$

A loro volta le equazioni complementari [5]

$$(4)\qquad \begin{cases} (\mathrm{S}_\alpha)_{\eta_\nu=0} \equiv \dfrac{1}{2}\,[\tilde{\nabla}^*_\alpha\,\tilde{\mathrm{K}}^\mu{}_\mu - \tilde{\nabla}^*_\mu\,\tilde{\mathrm{K}}^\mu{}_\alpha]_{\eta_\nu=0} = 0 \\ (\mathfrak{I} + \tilde{\mathrm{R}}^*)_{\eta_\nu=0} \equiv \dfrac{1}{4}\,[(\tilde{\mathrm{K}}^\mu{}_\mu)^2 - \tilde{\mathrm{K}}^{\alpha\beta}\,\tilde{\mathrm{K}}_{\alpha\beta}] + (\tilde{\mathrm{R}}^*)_{\eta_\nu=0} = 0\,, \end{cases}$$

stanti le identità

$$(5)\qquad (\mathrm{S}_\alpha)_{\eta_\nu=0} \equiv -\,\gamma^4\,(\mathrm{R}_{\alpha 4})_{\eta_\nu=0}\quad,\quad (\tilde{\mathrm{R}}^* + \mathfrak{I})_{\eta_\nu=0} \equiv [\,(\gamma^4)^2\,\mathrm{R}_{44} + \gamma^{\alpha\beta}\,\mathrm{R}_{\alpha\beta}]_{\eta_\nu=0}\,,$$

possono scriversi nella forma

$$(4)'\qquad \begin{cases} (\mathrm{S}_\alpha)_{\eta_\nu=0} \equiv \gamma_{\alpha\sigma}\,\gamma^4\,\partial_4\,u^\sigma + \dfrac{1}{2}\,\gamma^4\,\gamma^{\varrho\sigma}\,\partial_4\,\partial_\varrho\,\gamma_{\alpha\varrho} + q_{\alpha 4} = 0 \\ (\tilde{\mathrm{R}}^* + \mathfrak{I})_{\eta_\nu=0} \equiv \gamma^{\alpha\beta}\,\mathrm{R}_{\alpha\beta} + (\gamma^4)^2\left(-\dfrac{1}{2}\,\gamma^{\alpha\beta}\,\partial_4\,\partial_4\,\gamma_{\alpha\beta} + q_{44}\right) = 0\,, \end{cases}$$

(4) Le identità (3) si dimostrano facilmente in base alle seguenti altre:

$$\frac{1}{2}\,\gamma^{\varrho\sigma}\,\partial_\beta\,\gamma_{\varrho\sigma} \equiv \left\{ {\tilde{\nu} \atop \beta\nu} \right\}^*_{\eta_\nu=0} \equiv \partial_\beta\,\log\sqrt{\gamma}$$

(5) Cfr. (R. M.), (7).

ove le q_{i4} rappresentano, come le $(h_{\alpha\beta})_{\eta_\nu=0}$, funzioni razionali delle $\gamma_{\mu\nu}$, $\partial_r \gamma_{\mu\nu}$.

Il problema di evoluzione ridotto consiste dunque nella ricerca di un campo di tensori doppi simmetrici γ_{ij} soggetti alle condizioni $\gamma_{4i} = 0$, che in un intorno 4–dimensionale W della varietà iniziale $\overline{\Sigma}$ soddisfi al sistema di equazioni (1)′ e su $\overline{\Sigma}$ alle condizioni iniziali

$$(6) \qquad (\gamma_{ij})_{x^4=0} = \overline{\gamma}_{ij} \quad , \quad (\gamma^4 \partial_4 \gamma_{ij})_{x^4=0} = \overline{\varphi}_{ij} \cdots \overline{\Sigma},$$

$\overline{\gamma}_{ij}$, $\overline{\varphi}_{ij}$ essendo due tensori doppi simmetrici definiti su $\overline{\Sigma}$, con le rispettive componenti $\overline{\gamma}_{4i}$, $\overline{\varphi}_{4i}$ nulle, e ivi verificanti le condizioni di compatibilità

$$(7) \qquad (\mathrm{S}_\alpha)_{\eta_\nu=0} = 0 \quad , \quad (\tilde{\mathrm{R}}^* + \vartheta)_{\eta_\nu=0} = 0 \cdots \overline{\Sigma}.$$

2. *Cambiamento di coordinate. Sistema differenziale ausiliario.* Si supponga di aver già assegnato sulla varietà iniziale $\overline{\Sigma}$ due tensori doppi simmetrici $\overline{\gamma}_{\alpha\beta}$, $\overline{\varphi}_{\alpha\beta}$ che soddisfino le condizioni di compatibilità (7). Si esegua poi, in tutto un intorno di $\overline{\Sigma}$, una trasformazione invertibile di coordinate del tipo

$$(8) \qquad x^{\alpha'} = x^{\alpha'}(x^1, x^2, x^3) \quad , \quad x^{4'} = x^4,$$

ove le tre funzioni $x^{\alpha'}$ siano soluzioni funzionalmente indipendenti dell'equazione alle derivate parziali di tipo ellittico

$$(9) \qquad \overline{\gamma}^{\lambda\mu} (\tilde{\nabla}^*_\lambda \tilde{\nabla}^*_\mu \psi)_{x^4=0} \equiv \overline{\gamma}^{\lambda\mu} \partial_\lambda \partial_\mu \psi - (\overline{\gamma}^{\lambda\mu} \partial_\lambda \overline{\gamma}_{\mu\sigma} - \partial_\sigma \log \sqrt{\overline{\gamma}})\, \overline{\gamma}^{\varrho\sigma} \partial_\varrho \psi = 0.$$

Notiamo esplicitamente che le $\overline{\gamma}^{\lambda\mu}$ sono funzioni conosciute di x^1, x^2, x^3, figurando esse tra i dati iniziali. Equazioni del tipo (9) con ipotesi molto late (coefficienti continui e hölderiani) sono state studiate da Caccioppoli [(6)].

Per una qualunque trasformazione del tipo (8)–(9) tutte le componenti dei due campi vettoriali $\eta_i(x)$, $\gamma^i(x)$ rimangono ovunque invariate; inoltre, dato il carattere invariantivo dell'operatore $\overline{\gamma}^{\lambda\mu} \tilde{\nabla}^*_\lambda \tilde{\nabla}^*_\lambda$, nelle nuove coordinate le componenti $\overline{\gamma}^{\lambda'\mu'}$ del tensore metrico di $\overline{\Sigma}$ soddisfano, sulla $\overline{\Sigma}$ medesima, le equazioni

$$(10) \qquad (u^{\alpha'})_{x^{4'}=0} \equiv \overline{\gamma}^{\lambda'\mu'} (\tilde{\nabla}^*_{\lambda'} \tilde{\nabla}^*_{\mu'} x^{\alpha'})_{x^{4'}=0} \equiv \frac{1}{\sqrt{\overline{\gamma}'}} \partial_{\varrho'} (\sqrt{\overline{\gamma}'} \cdot \overline{\gamma}^{\varrho'\alpha'}) = 0 \cdots \overline{\Sigma}.$$

Così, disponendo soltanto di una trasformazione di coordinate del tipo (8)–(9), si può fare in modo che il tensore $\overline{\gamma}_{ik}$ assegnato su $\overline{\Sigma}$, e ivi verificante le condizioni di compatibilità (7), soddisfi le condizioni (10).

Ciò premesso, si esprima anzitutto il problema di evoluzione ridotto nelle nuove coordinate $x^{i'}$. Le equazioni di evoluzione, le condizioni iniziali

(6) R. Caccioppoli, *Sulle equazioni ellittiche a derivate parziali con n variabili indipendenti*, « Rendiconti Accademia Lincei » (VI), *19*, 83–89 (1934).

e le condizioni di compatibilità dei dati iniziali si scrivono rispettivamente:

$$(1)'' \qquad 2\,(s_{\alpha'\beta'})_{\eta_{\nu'}=0} \equiv -\gamma^{\varrho'\sigma'}\,\partial_{\varrho'}\,\partial_{\sigma'}\,\gamma_{\alpha'\beta'} + (\gamma^{4'})^2\,\partial_{4'}\,\partial_{4'}\,\gamma_{\alpha'\beta'} - (\gamma_{\beta'\nu'}\,u^{\nu'} + \gamma_{\alpha'\nu'}\,\partial_{\beta'}\,u^{\nu'}) - q_{\alpha'\beta'} = 0$$

$$(6)' \qquad (\gamma_{\alpha'\beta'})_{x^{4'}=0} = \bar{\gamma}_{\alpha'\beta'} \quad , \quad (\gamma^{4'}\partial_{4'}\,\gamma_{\alpha'\beta'})_{x^{4'}=0} = \bar{\varphi}_{\alpha'\beta'}$$

$$(7') \quad \left.\begin{cases} (S_{\alpha'})_{\eta_{\nu'}=0} \equiv \dfrac{1}{2}\,[\tilde{\nabla}^*_{\alpha'}\,\bar{\varphi}^{\mu'}{}_{\mu'} - \tilde{\nabla}^*_{\mu'}\,\bar{\varphi}^{\mu'}{}_{\alpha'}]_{\eta_{\nu'}=0} = 0 \\ (\mathfrak{I} + \tilde{R}^*)_{\eta_{\nu'}=0} \equiv \dfrac{1}{4}\,[(\bar{\varphi}^{\mu'}{}_{\mu'})^2 - \bar{\varphi}^{\alpha'\beta'}\,\bar{\varphi}_{\alpha'\beta'}] + (\tilde{R}^*)_{\eta_{\nu'}=0} = 0 \end{cases}\right\} \ldots \bar{\Sigma},$$

$\bar{\gamma}_{\alpha'\beta'}$, $\bar{\varphi}_{\alpha'\beta'}$ essendo le funzioni di $x^{1'}$, $x^{2'}$, $x^{3'}$ che rappresentano nelle nuove coordinate $(x^{i'})$ le componenti dei tensori spaziali $\bar{\gamma}_{\alpha\beta}$, $\bar{\varphi}_{\alpha\beta}$ precedentemente scelti su $\bar{\Sigma}$ e verificanti le (7).

Lasciando per un momento da parte tale problema, sul quale si tornerà tra poco, si consideri il sistema differenziale *ausiliario*

$$(11) \qquad 2\,p_{\alpha'\beta'} \equiv -\gamma^{\varrho'\sigma'}\,\partial_{\varrho'}\,\partial_{\sigma'}\,\gamma_{\alpha'\beta'} + (\gamma^{4'})^2\,\partial_{4'}\,\partial_{4'}\,\gamma_{\alpha'\beta'} - q_{\alpha'\beta'} = 0,$$

ottenuto formalmente dal precedente sopprimendovi i termini contenenti le $\partial_{\varrho'}\,u^{\nu'}$, e ad esso associamo le medesime condizioni iniziali (6)', (7)' che figurano nel problema precedente. Il sistema differenziale (11) rientra nella classe dei sistemi di equazioni alle derivate parziali, del 2° ordine, non lineari, di tipo iperbolico normale, considerati dalla Bruhat nella memoria sopra citata [7]. In virtù del teorema di esistenza e unicità da essa stabilito per tal genere di sistemi, si può asserire che esistono e sono univocamente determinate, in un intorno 4-dimensionale W di $\bar{\Sigma}$, sei funzioni $\gamma_{\alpha'\beta'}(x')$ verificanti il sistema differenziale (11) e soddisfacenti su $\bar{\Sigma}$ alle condizioni iniziali (6)'.

3. *Condizioni atte a garantire la coincidenza della soluzione delle equazioni ridotte di evoluzione con la soluzione del sistema differenziale ausiliario.* Si considerino le identità [8]

$$(12) \quad \begin{cases} \gamma^{4'}\partial_{4'}\,S_{\mu'} = \dfrac{1}{2}\tilde{\nabla}^*_{\mu'}\,R - \dfrac{1}{2}\,\tilde{K}^{\alpha'}{}_{\alpha'}\,S_{\mu'} - \dfrac{1}{2}(R^* + \mathfrak{I})\,C_{\mu'} + \dfrac{1}{2}RC_{\mu'} - \tilde{\nabla}^*_{\alpha'}\,s^{\alpha'}{}_{\mu'} - C_{\alpha'}\,s^{\alpha'}{}_{\mu'} \\ \dfrac{1}{2}\gamma^{4'}\partial_{4'}(\tilde{R}^* + \mathfrak{I}) = \tilde{\nabla}^*_{\alpha'}\,S^{\alpha'} - 2\,C_{\alpha'}S^{\alpha'} - \dfrac{1}{2}\,\tilde{K}^{\alpha'}{}_{\alpha'}(\tilde{R}^* + \mathfrak{I}) + \dfrac{1}{4}R\tilde{K}^{\alpha'}{}_{\alpha'} - \dfrac{1}{2}\,\tilde{K}_{\varrho'\sigma'}\,s^{\varrho'\sigma'}. \end{cases}$$

Se si pone

$$(13) \quad \begin{cases} n_{\alpha'\beta'} \equiv -\dfrac{1}{2}\,(\gamma_{\beta'\nu'}\,\partial_{\alpha'}\,u^{\nu'} + \gamma_{\alpha'\nu'}\,\partial_{\beta'}\,u^{\nu'}) \quad , \quad n_{\alpha'4'} \equiv -\gamma_{\alpha'\nu'}\,\partial_{4'}\,u^{\nu'}\,, \\ p_{\alpha'4'} \equiv -\dfrac{1}{2}\gamma^{\varrho'\sigma'}\,\partial_{4'}\,\partial_{\varrho'}\,\gamma_{\alpha'\sigma'} + q_{\alpha'4'}\cdot\eta_{4'} \quad , \quad p_{4'4'} \equiv -\dfrac{1}{2}\,\gamma^{\mu'\nu'}\,\partial_{4'}\,\partial_{4'}\,\gamma_{\mu'\nu'} + q_{4'4'}, \end{cases}$$

(7) Nel lavoro della Bruhat (cfr. nota [3]) si trattava di un sistema di 10 equazioni in 10 incognite; nella Nota presente le equazioni e le incognite sono soltanto 6.

(8) Cfr. (R.M.), (8)', tenendo presente che l'ipotesi $\eta_{\alpha'=0}$ implica $\tilde{\Omega}_{\alpha'\beta'} = 0$.

le funzioni $(s_{\alpha'\beta'})_{\eta_{\nu'}=0}$, $(S_{\alpha'})_{\eta_{\nu'}=0}$ e $(R^* + \mathfrak{I})_{\eta_{\nu'}=0}$ che figurano nelle (12) possono scriversi nella forma

$$(14) \qquad (s_{\alpha'\beta'})_{\eta_{\mu'}=0} \equiv n_{\alpha'\beta'} + p_{\alpha'\beta'} \quad , \quad (S_{\alpha'})_{\eta_{\mu'}=0} \equiv -\gamma^{4'}(n_{\alpha'4'} + p_{\alpha'4'}) ,$$

$$(\tilde{R}^* + \mathfrak{I})_{\eta_{\mu'}=0} \equiv \gamma^{\alpha'\beta'}(s_{\alpha'\beta'})_{\eta_{\mu'}=0} + (\gamma^{4'})^2 p_{4'4'} ,$$

e quindi le (12) stesse assumono l'aspetto seguente:

$$(12)' \begin{cases} -\gamma^{4'}\partial_{4'}[\gamma^{4'}(n_{\mu'4'} + p_{\mu'4'})] = \frac{1}{2}\tilde{\nabla}^*_{\mu'}[\gamma^{\alpha'\beta'}(n_{\alpha'\beta'} + p_{\alpha'\beta'}) - (\gamma^{4'})^2 p_{4'4'}] + \\ \qquad + \frac{1}{2}\tilde{K}^{\alpha'}{}_{\alpha'}\gamma^{4'}(n_{\mu'4'} + p_{\mu'4'}) - (\gamma^{4'})^2 p_{4'4'} C_{\mu'} + \\ \qquad - \gamma^{\alpha'\varrho'}\tilde{\nabla}^*_{\alpha'}(n_{\varrho'\mu'} + p_{\varrho'\mu'}) - \gamma^{\varrho'\sigma'}(n_{\sigma'\mu'} + p_{\sigma'\mu'})C_{\varrho'} \\ \frac{1}{2}\gamma^{4'}\partial_{4'}[\gamma^{\alpha'\beta'}(n_{\alpha'\beta'} + p_{\alpha'\beta'}) + (\gamma^{4'})^2 p_{4'4'}] = \gamma^{\varrho'\sigma'}\tilde{\nabla}^*_{\varrho'}[\gamma^{4'}(n_{\sigma'4'} + p_{\sigma'4'})] + \\ \qquad + 2\gamma^{\varrho'\sigma'}C_{\varrho'}[\gamma^{4'}(n_{\sigma'4'} + p_{\sigma'4'})] - \frac{1}{4}\tilde{K}^{\alpha'}{}_{\alpha'}\gamma^{\mu'\varrho'}(n_{\mu'\varrho'} + p_{\mu'\varrho'}) + \\ \qquad - \frac{3}{4}\tilde{K}^{\alpha'}{}_{\alpha'}(\gamma^{4'})^2 p_{4'4'} - \frac{1}{2}\tilde{K}_{\varrho'\sigma'}\gamma^{\varrho'\mu'}\gamma^{\sigma'\nu'}(n_{\mu'\nu'} + p_{\mu'\nu'}) . \end{cases}$$

Si considerino ora le funzioni $\gamma_{\alpha'\beta'}(x')$, unicamente determinate, soddisfacenti al sistema differenziale ausiliario (11) e alle condizioni iniziali (6)′–(7)′, e si sostituiscano nelle (12)′. Si ottengono in tal modo le relazioni differenziali

$$(15) \begin{cases} -\gamma^{4'}\partial_{4'}[\gamma^{4'}(n_{\mu'4'} + p_{\mu'4'})] = \frac{1}{2}\tilde{\nabla}^*_{\mu'}[\gamma^{\alpha'\beta'}n_{\alpha'\beta'} - (\gamma^{4'})^2 p_{4'4'}] + \\ \qquad + \frac{1}{2}\tilde{K}^{\alpha'}{}_{\alpha'}\gamma^{4'}(n_{\mu'4'} + p_{\mu'4'}) - (\gamma^{4'})^2 p_{4'4'}C_{\mu'} - \gamma^{\alpha'\varrho'}\tilde{\nabla}^*_{\alpha'}n_{\varrho'\mu'} - \gamma^{\varrho'\sigma'}n_{\sigma'\mu'}C_{\varrho'} \\ \frac{1}{2}\gamma^{4'}\partial_{4'}[\gamma^{\alpha'\beta'}n_{\alpha'\beta'} + (\gamma^{4'})^2 p_{4'4'}] = \gamma^{\varrho'\sigma'}\tilde{\nabla}^*_{\varrho'}[\gamma^{4'}(n_{\sigma'4'} + p_{\sigma'4'})] + \\ \qquad + 2\gamma^{\varrho'\sigma'}C_{\varrho'}[\gamma^{4'}(n_{\sigma'4'} + p_{\sigma'4'})] - \frac{1}{4}\tilde{K}^{\alpha'}{}_{\alpha'}\gamma^{\mu'\varrho'}n_{\mu'\varrho'} - \frac{1}{2}\tilde{K}_{\varrho'\sigma'}n^{\varrho'\sigma'} + \\ \qquad - \frac{3}{4}\tilde{K}^{\alpha'}{}_{\alpha'}(\gamma^{4'})^2 p_{4'4'} . \end{cases}$$

Le prime tre delle (15), quando si espliciti la dipendenza (13) dalle funzioni $u^{\varrho'}$ e si isolino poi a primo membro le derivate seconde delle funzioni $u^{\varrho'}$, diventano

$$(16) \qquad \gamma_{\mu'\varrho'}\left|-\frac{1}{2}\gamma^{\alpha'\beta'}\partial_{\alpha'}\partial_{\beta'}u^{\varrho'} + (\gamma^{4'})^2\partial_{4'}\partial_{4'}u^{\varrho'}\right| = L_{\mu'}$$

ove si è posto

$$(17) \quad L_{\mu'} \equiv -(\gamma^{4'})^2(2\,\partial_{4'}\gamma_{\mu'\beta'}\cdot\partial_{4'}u^{\beta'} + u^{\sigma'}\partial_{4'}\partial_{4'}\gamma_{\mu'\sigma'}) - l^{\varrho'}_{\varrho'\mu'} + \frac{1}{2}l^{\varrho'}_{\mu'\varrho'} + O_{\mu'}$$

con le funzioni $l^{\varrho'}_{\mu'\nu'}$ e $O_{\mu'}$ lineari omogenee (9) le prime nelle $\partial_{\varrho'} u^{\sigma'}$ e le seconde nelle $\partial_{r'} u^{\sigma'}$, $p_{i'4'}$, $\partial_{r'} p_{i'4'}$.

Poiché in W risulta det. $\|\gamma_{\mu'\varrho'}\| > 0$ (cfr. memoria cit. in (3) p. 212), alle (16) si possono sostituire le equivalenti

$$(16)' \qquad \gamma^{\alpha'\beta'} \partial_{\alpha'} \partial_{\beta'} u^{\varrho'} - 2 (\gamma^{4'})^2 \partial_{4'} \partial_{4'} u^{\varrho'} + b^{\varrho'} = 0$$

$b^{\varrho'}$ essendo funzioni che hanno struttura analoga a quella delle $L_{\mu'}$. Le (16)' possono essere interpretate come un sistema di equazioni alle derivate parziali del 2° ordine nelle tre funzioni $u^{\varrho'}$, di tipo iperbolico normale, e per esse è valido il teorema di esistenza e unicità della Bruhat già utilizzato per il sistema differenziale ausiliario. Se si aggiunge l'ipotesi che su $\bar{\Sigma}$ i due tensori assegnati $\bar{\gamma}_{\alpha'\beta'}$, $\bar{\varphi}_{\alpha'\beta'}$ soddisfino oltre alle (7)' anche le condizioni aggiuntive

$$(18) \quad [\gamma^{4'} \partial_{4'} u^{\sigma'}]_{x^{4'}=0} \equiv \left(\frac{1}{2}\, \bar{\gamma}^{\mu'\nu'}\, \bar{\gamma}^{\varrho'\sigma'} - \bar{\gamma}^{\varrho'\mu'}\, \bar{\gamma}^{\sigma'\nu'}\right) \partial_{\varrho'}\, \bar{\varphi}_{\mu'\nu'} + \partial_{\varrho'} (\bar{\gamma}^{\varrho'\mu'} \bar{\gamma}^{\sigma'\nu'})\, \bar{\varphi}_{\mu'\nu'} +$$
$$- \partial_{\varrho'}\, \bar{\gamma}_{\mu'\nu'} \left(\frac{1}{2}\, \bar{\varphi}^{\mu'\nu'}\, \bar{\gamma}^{\varrho'\sigma'} + \bar{\gamma}^{\mu'\nu'}\, \bar{\varphi}^{\varrho'\sigma'}\right) + (\gamma^{4'} \partial_{\varrho'}\, \eta_{4'})_{x^{4'}=0} \cdot \left(\bar{\varphi}^{\varrho'\sigma'} - \frac{1}{2}\, \bar{\gamma}^{\varrho'\sigma'}\, \bar{\varphi}^{\nu'}_{\nu'}\right) = 0$$

si può verificare che l'unica soluzione delle (16)', annullantesi su $\bar{\Sigma}$ con le sue derivate prime, è la soluzione nulla $u^{\varrho'} \equiv 0$. A questo scopo basta verificare che $u^{\varrho'} = 0$ soddisfa alle (15). Osserviamo dapprima che $u^{\varrho'} = 0$ implica $n_{\alpha'\beta'} = 0$, con che le (15) stesse diventano

$$(19) \quad \begin{cases} -(\gamma^{4'})^2\, \partial_{4'}\, p_{\mu'4'} = -\dfrac{1}{2}\, \tilde{\nabla}^*_{\mu'} [(\gamma^{4'})^2\, p_{4'4'}] + \\ \qquad + \gamma^{4'} \left(\partial_{4'} \gamma^{4'} + \dfrac{1}{2}\, \tilde{K}^{\alpha'}{}_{\alpha'}\right) p_{\mu'4'} - (\gamma^{4'})^2\, p_{4'4'}\, C_{\mu}, \\ \dfrac{1}{2} (\gamma^{4'})^3\, \partial_{4'}\, p_{4'4'} = -\dfrac{1}{2}\, \gamma^{4'}\, \partial_{4'} (\gamma^{4'})^2 \cdot p_{4'4'} + \\ \qquad + \gamma^{\varrho'\sigma'}\, \tilde{\nabla}^*_{\varrho'} (\gamma^{4'}\, p_{\sigma'4'}) + 2\, \gamma^{\varrho'\sigma'}\, C_{\varrho'}\, \gamma^{4'}\, p_{\sigma'4'} - \dfrac{3}{4}\, \tilde{K}^{\alpha'}{}_{\alpha'} (\gamma^{4'})^2\, p_{4'4'}. \end{cases}$$

Le (19) si presentano come un sistema di quattro equazioni alle derivate parziali del primo ordine nelle funzioni $p_{i'4'}$, di forma normale rispetto alla variabile $x^{4'}$. Esse ammettono ovviamente nell'intorno W di $\bar{\Sigma}$ la soluzione nulla $p_{i'4'} = 0$ la quale, d'altra parte, è l'unica (10) che si annulla su $\bar{\Sigma}$.

(9) Le loro espressioni sono le seguenti:

$$l^{\varrho'}_{\mu'\nu'} \equiv -\gamma^{\varrho'\beta'} \left[\frac{1}{2}\, \partial_{\mu'}\, \gamma_{\beta'\sigma'} \cdot \partial_{\nu'}\, u^{\sigma'} + \frac{1}{2}\, \partial_{\mu'}\, \gamma_{\nu'\varrho'}\, \partial_{\beta'}\, u^{\varrho'} + \left\{ {\tilde{\sigma}' \atop \mu'\nu'} \right\}^* n_{\sigma'\beta'} + \left\{ {\tilde{\sigma}' \atop \mu'\beta'} \right\}^* n_{\nu'\sigma'} \right]$$

$$O_{\mu'} \equiv -\gamma^{\varrho'\sigma'}\, n_{\sigma'\mu'}\, C_{\varrho'} + \frac{1}{2}\, \gamma^{4'}\, \tilde{K}^{\alpha'}_{\alpha'}\, n_{\mu'4'} + \gamma^{4'}\, \partial_{4'} (\gamma^{4'}\, p_{4'4'}) - \frac{1}{2}\, \tilde{\nabla}^*_{\mu'} [(\gamma^{4'})^2\, p_{4'4'}] +$$
$$+ \frac{1}{2}\, \tilde{K}^{\alpha'}{}_{\alpha'}\, \gamma^{4'}\, p_{\mu'4'} - (\gamma^{4'})^2\, p_{4'4'}\, C_{\mu'} + \frac{1}{2}\, \partial_{4'} (\gamma^{4'})^2 \cdot n_{\mu'4'}.$$

(10) S. CINQUINI, *Sopra un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali non lineari*, Note I e II, « Rendiconti Accademia Lincei » (VIII), *33*, 401–404 (1962) e *34*, 27–33 (1963).

Per costatare che le $p_{i'4'}$ sono nulle su $\bar{\Sigma}$ basta tener presente che i dati di Cauchy soddisfano le condizioni di compatibilità $(7)'$ le quali, in virtù delle (14), possono essere scritte nella forma

$$(7)'' \qquad [\gamma^{4'}(n_{\alpha'4'} + p_{\alpha'4'})]_{x^{4'}=0} = 0 \quad , \quad [\gamma^{\alpha'\beta'}(n_{\alpha'\beta'} + p_{\alpha'\beta'}) + (\gamma^{4'})^2 p_{4'4'}]_{x^{4'}=0} = 0 ;$$

da queste, avendosi su $\bar{\Sigma}$ per ipotesi $u^{\varrho'} = 0$, $\partial_{i'} u^{\varrho'} = 0$, e dovendo essere soddisfatte le (11), si trae $(p_{i'4'})_{x^{4'}=0} = 0$. Pertanto, scegliendo i dati di Cauchy in modo che verifichino le $(7)'$ e (18), il campo di tensori doppi simmetrici $\gamma_{i'k'}$ $(\gamma_{4'i'} = 0)$ che in W soddisfa il sistema differenziale (11) e su $\bar{\Sigma}$ le $(6)'$, soddisfa pure in W le equazioni

$$u^{\sigma'} \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma'}} \partial_{\varrho'} (\sqrt{\gamma'} \cdot \gamma^{\varrho'\sigma'}) = 0$$

e quindi anche il sistema di evoluzione $(1)''$.

4. *Alcune considerazioni sulle condizioni iniziali aggiuntive*. Si può osservare che le tre condizioni (18) e il primo gruppo delle $(7)'$ sono senz'altro soddisfatte quando si assuma uguale a zero il tensore $\bar{\varphi}_{\alpha'\beta'}$. Dato il significato del tensore medesimo $\bar{\varphi}_{\alpha'\beta'} = (\gamma^{4'} \partial_{4'} \gamma_{\alpha'\beta'})_{x^{4'}=0}$, condizioni siffatte $(\bar{\varphi}_{\alpha'\beta'} = 0)$ possono qualificarsi condizioni iniziali di *tipo rigido*. L'importanza di condizioni di questo tipo è stata messa in evidenza dalla stessa Bruhat la quale, nel suo studio sul problema dei dati iniziali [11], ha mostrato come soltanto detta condizione assicuri la regolarità delle soluzioni dell'equazione residua $(7)'_2$ quando l'ipersuperficie $\bar{\Sigma}$ sia generica e non limitata. È opportuno osservare esplicitamente che la condizione iniziale $\bar{\varphi}_{\varrho'\sigma'} = 0$ non implica affatto che il riferimento fisico sia rigido. Per costatarlo si prendano in esame le equazioni ridotte di evoluzione (1) che possono essere scritte nella seguente forma compatta [12]

$$\frac{1}{2} \gamma^4 \partial_4 \tilde{K}_{\mu\nu} = -\frac{1}{4} \tilde{K}^{\alpha}{}_{\alpha} \tilde{K}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \tilde{K}^{\varrho}{}_{\mu} \tilde{K}_{\varrho\nu} + \tilde{\nabla}^*_{\mu} C_{\nu} + C_{\mu} C_{\nu} - \tilde{R}^*_{\mu\nu} .$$

Esse mostrano che mediante i dati iniziali si determina su $\bar{\Sigma}$ la derivata longitudinale del tensore di deformazione dell'incognito riferimento fisico. Quand'anche si ponesse su $\bar{\Sigma}$ $(\tilde{K}_{\alpha\beta})_{x^4=0} = \bar{\varphi}_{\alpha\beta} = 0$, scegliendo $\eta_4(x)$ effettivamente dipendente da x^4 e tale che su $\bar{\Sigma}$ si avesse $\tilde{\nabla}^*_{\mu} C_{\nu} + C_{\mu} C_{\nu} \neq \tilde{R}^*_{\mu\nu}$, il problema di evoluzione determinerebbe in generale un riferimento fisico non stazionario, né rigido.

(11) *Sur l'integration des équations de la relativité générale*, « Journal of rational mechanics and Analysis », 5, 951–966 (1956).

(12) Cfr. (R.M.) $(1)_1$, $(5)_1$; l'espressione dei tensori che intervengono è la seguente:

$$\tilde{K}_{\mu\nu} \equiv \gamma^4 \partial_4 \gamma_{\mu\nu} \quad , \quad C_{\nu} \equiv \partial_{\nu} \log(-\eta_4) \quad , \quad \tilde{R}^*_{\mu\nu} \equiv \gamma^{\tau\varrho} \tilde{R}^*_{\varrho\mu\tau\nu} \equiv$$

$$\equiv \gamma^{\tau\varrho} \left[\frac{1}{2} (\partial_{\tau} \partial_{\mu} \gamma_{\varrho\nu} - \partial_{\tau} \partial_{\varrho} \gamma_{\mu\nu} - \partial_{\mu} \partial_{\nu} \gamma_{\tau\varrho} + \partial_{\nu} \partial_{\varrho} \gamma_{\tau\mu}) - \gamma^{\alpha\beta} (\mu\nu, \alpha)(\tau\rho, \beta) + \gamma^{\alpha\beta} (\tau\mu, \alpha)(\nu\rho, \beta) \right] .$$