
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

ENRICO VALENTI

Sui punti principali delle curve piane affini

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 42 (1967), n.1, p. 8–11.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_1_8_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sui punti principali delle curve piane affini.* Nota di ENRICO VALENTI (*), presentata (**) dal Corrisp. E. G. TOGLIATTI.

SUMMARY. — Some remarks on the "principal points" of the algebraic curves in an affine plane, i.e., on those points each of which constitutes the unique intersection with another algebraic curve.

1. Sia k un campo algebricamente chiuso e sia $A^2(k)$ il piano affine sopra k . Se γ è una k -curva piana irriducibile, cioè una curva algebrica di $A^2(k)$ luogo degli zeri di un polinomio irriducibile $g \in k[X, Y]$, diremo che un punto P di γ è *principale* se l'ideale p di P è principale modulo g , cioè se esiste una k -curva che intersechi γ nel solo punto P .

È noto che i punti di γ sono tutti principali se e solo se γ è fattoriale, cioè se e solo se è fattoriale l'anello $k[X, Y]/(g)$ (anello delle coordinate di γ) (cfr. 3); e W. M. Cunnea ha dimostrato che una k -curva non singolare (non necessariamente piana) è fattoriale se e solo se è razionale (cfr. 1, teorema 4.5).

In questa Nota proverò che una k -curva piana con un insieme non numerabile di punti principali è sempre fattoriale. Inoltre proverò l'esistenza di k -curve piane razionali (ovviamente singolari) su un campo k non numerabile aventi un'infinità numerabile di punti principali (cfr. esempio 1). Infine, limitatamente al caso di una k -curva piana su un campo k non numerabile, ritroverò, per via geometrica, il risultato di W. M. Cunnea.

2. Sia γ una k -curva irriducibile di $A^2(k)$ e siano P, Q due suoi punti principali distinti che è lecito supporre individuati su γ da due curve α, β dello stesso ordine m . Basta infatti notare che se $f = 0$ è l'equazione di γ e se $(f, g), (f, h)$ sono gli ideali di P e Q , ove $f, g, h \in k[X, Y]$, risulta $(f, g) = (f, g + fgh)$, $(f, h) = (f, h + fgh)$.

Si riconosce facilmente che la totalità delle k -curve piane d'ordine m contenenti γ , oppure intersecanti γ in un punto al più, costituiscono un sistema algebrico che indichiamo con Σ_m .

LEMMA. — *Se il fascio di curve individuato da α, β è contenuto in Σ_m , la curva γ è razionale non singolare.*

Cominciamo a provare che γ è non singolare. Sia Φ il fascio individuato da α, β ; se γ avesse un punto singolare S la curva σ di Φ contenente S avrebbe con γ più di una intersezione; onde, essendo γ irriducibile, la conterrebbe come parte. Ed allora, se $f = 0$ e $g = 0$ sono le equazioni di γ e

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi nn. 10 e 44 del Comitato per la matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 gennaio 1967.

di α rispettivamente, la curva β potrebbe rappresentarsi con un'equazione $\lambda g + \mu f q = 0$, con $\lambda, \mu \in k$ e $q \in k[X, Y]$; e pertanto passerebbe per il punto P comune a γ ed α ; assurdo.

La curva γ è poi razionale. Infatti: sia T un punto di γ ; se $h = 0$ è l'equazione di β , la curva τ di Φ passante per T ha equazione del tipo $g + th = 0$ ($t \in k$); e poiché τ e γ si incontrano solo in T , eliminando Y dalle equazioni $f = 0$, $g + th = 0$, si trova che l'ascissa x di T deve soddisfare ad un'equazione di 1° grado in X : $A(t)X + B(t) = 0$, con $A(t)$, $B(t)$ polinomi in t ; ossia x è funzione razionale di t . Similmente si vede che anche l'ordinata y di T è funzione razionale di t .

PROPOSIZIONE 1. — *Una k -curva piana avente un insieme non numerabile di punti principali è razionale non singolare.*

Sia γ una k -curva non razionale oppure singolare; per ogni intero positivo m basta dimostrare che le curve di ordine m staccanti su γ un punto principale sono in numero finito. Ora, ogni tale curva appartiene al sistema Σ_m che, in virtù di un risultato di D. Gallarati (cfr. [2], n. 2), è l'unione di un numero finito di sistemi lineari Φ_i . Poiché, per il lemma, ogni Φ_i contiene al più una curva siffatta, si ha la tesi.

COROLLARIO. — *Sia k un corpo non numerabile. Allora una k -curva piana fattoriale è razionale non singolare.*

Si osservi che il corollario precedente è incluso nel teorema di Cunnea, già citato.

Se inoltre teniamo presente la successiva proposizione 2 (ved. n. 3), anch'essa contenuta nel teorema di Cunnea, si ottiene il risultato annunciato all'inizio:

TEOREMA. — *Affinché una k -curva piana γ sia fattoriale basta che abbia una infinità non numerabile di punti principali.*

Il seguente esempio prova l'esistenza di k -curve razionali aventi soltanto un'infinità numerabile di punti principali.

ESEMPIO 1. — Fissato nel piano un sistema di coordinate affini x, y , sia γ la k -curva di equazione $x^3 - x^2y - y^2 = 0$ per la quale scegliamo la rappresentazione parametrica $x = \frac{1}{t(t-1)}$, $y = \frac{1}{t^2(t-1)}$ (t in corrispondenza biunivoca con i punti di γ). Sia Γ_m una k -curva d'ordine $m \geq 2$ non passante per $O(0, 0)$; si può supporre che la sua equazione sia $\varphi(x, y) = 0$ con $\varphi(x, y) = 1 + a_0x + a_1y + b_0x^2 + b_1xy + b_2y^2 + \dots + c_0x^m + \dots + c_my^m$.

Le intersezioni di γ con Γ_m in $A^2(k)$ provengono dalle radici diverse da 0 e da 1 dell'equazione:

$$\begin{aligned} (1) \quad & t^{3m} - mt^{3m-1} + \left[\binom{m}{2} + a_0 \right] t^{3m-2} + \left[-\binom{m}{3} - a_0(m-1) + a_1 \right] t^{3m-3} + \\ & + \left[\binom{m}{4} + a_0 \binom{m-1}{2} - a_1(m-1) + b_0 \right] t^{3m-4} + \\ & + \left[-\binom{m}{5} - a_0 \binom{m-1}{3} + a_1 \binom{m-1}{2} - b_0(m-2) + b_1 \right] t^{3m-5} + \dots + c_m = 0. \end{aligned}$$

3. L'enunciato della seguente proposizione 2 è incluso nel teorema di Cunnea citato nel n. 1; ne diamo qui una breve dimostrazione geometrica.

PROPOSIZIONE 2. — *I punti di una k -curva piana razionale non singolare sono tutti principali.*

Sia γ una k -curva razionale non singolare d'ordine n e sia Φ un fascio di k -curve d'ordine m secante su γ la serie lineare g_1^1 ed avente $q - 1$ (≥ 0) punti base su γ . Poiché le curve di Φ possono avere una componente comune (d'ordine arbitrario), è lecito supporre $m \geq 2n - 3$; esiste allora un sistema lineare Λ di dimensione $\geq \frac{m(m+3)}{2} - mn + q \geq q$ costituito da curve d'ordine m aventi ciascuna non più di q intersezioni con γ (cfr. [2], n. 2).

Sia ora P un punto qualsiasi di γ ; il sistema lineare $\Lambda(P)$ costituito dalle curve di Λ che passano per P , ha dimensione $\geq q - 1$ ed in $\Lambda(P)$ esiste un sistema algebrico di dimensione $\geq \dim. \Lambda(P) - q + 1 \geq 0$ di curve aventi con γ una sola intersezione (cfr. [2], n. 2). Questa intersezione non può differire da P onde P è principale.

Dalle proposizioni 1 e 2 otteniamo il seguente corollario col quale ritroviamo, sotto ipotesi più restrittive, il teorema di Cunnea.

COROLLARIO. — *Se k è un campo non numerabile, una k -curva piana non singolare è fattoriale se e solo se è razionale.*

BIBLIOGRAFIA

- [1] W. M. CUNNEA, *Unique factorization in algebraic function fields*. Illinois « J. of Math. », vol. VIII (1964).
- [2] D. GALLARATI, *Alcune considerazioni sui sistemi lineari di curve algebriche piane affini*. « Acc. Ligure di Scienze e Lettere » (1966).
- [3] W. GRÖBNER, *Sopra un teorema di Severi*, « Rend. di Mat. », ser. 5^a, t. 11, 217-223 (1952).