Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gaetano Fichera

Sul miglioramento delle approssimazioni per difetto degli autovalori. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.2, p. 138–145.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_2_138_0>

Analisi numerica. — *Sul miglioramento delle approssimazioni per difetto degli autovalori* (*). Nota I (**) del Corrisp. GAETANO FICHERA.

SUMMARY. — A new formula giving lower bounds to eigenvalues is proved. It improves the approximation given by a known formula without requiring the numerical computation of the characteristic roots of matrices of higher order.

Recentemente ho potuto elaborare una teoria per l'approssimazione per difetto degli autovalori per una classe di operatori simmetrici positivi, interessante, particolarmente, la teoria dei problemi al contorno per i sistemi differenziali lineari di tipo ellittico. Tale teoria, compiutamente esposta in [2] ed in [3] (1), fornisce una doppia infinità di formule, ciascuna delle quali provvede al calcolo per difetto di ogni autovalore dell'operatore considerato. L'applicazione di una di queste formule è possibile allorché si conosce uno degli *invarianti ortogonali* dell'operatore inverso di quello considerato. Tali invarianti ortogonali costituiscono una doppia successione ed il loro calcolo è possibile allorché è nota una rappresentazione integrale del menzionato operatore inverso. In tal caso una delle ∞^2 formule di approssimazione da me trovate coincide con una già scoperta dal Trefftz [5]. Ma la conoscenza esplicita della rappresentazione integrale dell'operatore inverso è circostanza da ritenersi eccezionale; basti pensare che, nel caso degli operatori differenziali ellittici, essa equivale alla conoscenza esplicita della funzione o matrice di Green. Ho potuto superare in [2] e [3] questa difficoltà mediante un teorema di struttura degli operatori di Green, il quale permette il calcolo di tutti gli invarianti ortogonali di tali operatori. Si perviene in tal modo al calcolo per difetto degli autovalori, utilizzando unicamente, oltre ad uno degli invarianti ortogonali, le approssimazioni per eccesso degli autovalori fornite dal classico metodo di Rayleigh-Ritz.

La teoria dimostra che, allorché si fa tendere all'infinito l'ordine n dell'approssimazione di Rayleigh-Ritz, ciascuna delle formule da me considerate fornisce, per ogni fissato autovalore, una successione che tende ad esso non decrescendo.

Si presenta il problema di migliorare l'approssimazione ottenuta in corrispondenza ad un certo n. È questo un tipico caso nel quale l'ovvia risposta fornita dalla teoria non sempre è praticamente attuabile. Infatti non sempre, in pratica, è possibile spingere l'approssimazione di Rayleigh-Ritz ad un

(*) La ricerca esposta nella presente Nota I e nella successiva Nota II è stata patrocinata dagli «Aerospace Research Laboratories» tramite l'European Office of Aerospace Research (OAR) United States Air Force (Grant N. AF EOAR 66-48).

(**) Presentata nella seduta del 14 gennaio 1967.

(1) I numeri fra parentesi quadra rimandano alla Bibliografia alla fine della Nota II.

$m > n$. In effetti, dato comunque un calcolatore automatico, esiste un n_0 tale che non è possibile calcolare mediante quello, con un grado di precisione prefissato, le radici caratteristiche di una matrice di ordine $m > n_0$. Ne viene allora che il metodo non potrà, in pratica, essere spinto oltre l'approssimazione di ordine n_0. Ora l'esperienza dimostra che per quanto concerne le approssimazioni per eccesso, cioè per quanto concerne i valori forniti dal metodo di Rayleigh–Ritz, i calcolatori elettronici di tipo medio oggi in uso sono in grado di fornire approssimazioni del tutto soddisfacenti, cioè lo n_0 ad essi competente è sufficientemente elevato per le richieste delle applicazioni. Ciò non accade – in egual misura – per le approssimazioni per difetto, specie per quanto riguarda gli autovalori di indice più elevato. In altri termini, se è da ritenere che il metodo di Rayleigh–Ritz fornisce valori approssimati soddisfacenti per i primi k autovalori, le approssimazioni per difetto saranno da considerarsi tali solo per i primi k' autovalori, con un k' che, in genere, è minore di k. Le numerose esperienze compiute presso il nostro Centro di Calcolo hanno costantemente confermato il verificarsi di tale circostanza.

Si pone allora il seguente problema: *fissato* n_0, *ed ammesso di poter solo calcolare gli autovalori di matrici di ordine* $\leq n_0$, *migliorare le approssimazioni per difetto fornite dalle formule date in* [2] *e* [3].

È questa una questione di natura teorica che dà luogo a problemi piuttosto delicati di analisi funzionale. Alla loro risoluzione è dedicata la presente Nota ed una seguente dallo stesso titolo.

Considereremo alla fine della Nota II un esempio numerico, il quale, ancorché relativo ad un caso particolarmente semplice, illustra in modo significativo i risultati teorici ottenuti.

Avvertiamo che ci limiteremo a considerare la formula di approssimazione per difetto, che corrisponde alla scelta dell'invariante ortogonale $\mathfrak{I}_1^2$ (cfr. [2] pag. 141 e [3] pag. 333). È da presumere che i risultati ottenuti possano estendersi anche ad altri casi.

1. Sia S uno spazio di Hilbert complesso di dimensione non finita. Indichiamo con L un operatore lineare avente come dominio la varietà lineare $\mathfrak{D}_L$ di S e codominio contenuto in S. Sia V una varietà lineare contenuta in $\mathfrak{D}_L$. Supponiamo sia soddisfatta la seguente ipotesi

α) *Esiste un operatore lineare, compatto e strettamente positivo* G *dello spazio* S *tale che*: 1) *riesca* $G(S) \subset V$; 2) *assunti comunque* $u \in S$ *e* $v \in V$ *si abbia* $G L v = v$, $L G u = u$.

Si noti che se v e z sono due elementi di V, si ha, indicato con $(\cdot\,,\cdot)$ il prodotto scalare in S,

$$(v\,, Lz) = (Lv\,, z). \tag{1}$$

Infatti, posto $Lz = u$, $Lv = w$, si ha $z = Gu$, $v = Gw$ e $(Gw\,, u) = (w\,, Gu)$, cioè la (1). Riesce inoltre $(Lv\,, v) > 0$ per ogni $v \neq 0$ appartenente a V.

Consideriamo il seguente problema di autovalori

$$Lv - \lambda v = 0 \quad , \quad v \in V. \tag{2}$$

Posto $u = Lv$ e $\mu = \lambda^{-1}$, esso è perfettamente equivalente, come subito si constata, al seguente problema di autovalori

$$Gu - \mu u = 0 \quad , \quad u \in S.$$

Ne segue che il problema (2) ammette come *insieme caratteristico* un'infinità numerabile di autovalori reali e positivi, ciascuno dei quali ha molteplicità finita. Essi costituiscono una successione divergente la quale verrà indicata al modo seguente: $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \geq \lambda_k \leq \cdots$

In tale successione ogni autovalore è ripetuto un numero di volte pari alla rispettiva molteplicità. Tale ordinamento degli autovalori del problema (1) conferisce significato ben preciso alla frase: *λ è il k-esimo autovalore del problema* (1). Ciò significa che è $\lambda = \lambda_k$. Poniamo $\mu_k = \lambda_k^{-1}$. Sia $\{u_k\}$ un sistema ortonormale di autosoluzioni del problema (1), con $Lu_k - \lambda u_k = 0$. È ovvio che sarà anche $Gu_k - \mu_k u_k = 0$.

Introduciamo in S il seguente nuovo prodotto scalare $((u, v)) = (G u, v)$. Sia Σ lo spazio hilbertiano ottenuto da S per completamento rispetto alla metrica introdotta dal nuovo prodotto scalare. La lunghezza di un vettore u di S verrà indicata con $|u|$ e quella di un vettore v di Σ con $\|v\|$.

Sia $u \in S$ e $v \in \Sigma$. Si ha

$$|((u, v))| \leq \|u\| \|v\| = (Gu, u)^{1/2} \|v\| \leq |G|^{1/2} |u| \|v\|, \tag{3}$$

avendo indicato con $|G|$ la norma dell'operatore G di S. Ne viene che $((u, v))$ è come funzione di u un funzionale lineare e continuo definito in S. Esisterà quindi una trasformazione – ovviamente lineare – $\tilde{G}$ che muta un elemento di Σ in uno di S, tale che $((u, v)) = (u, \tilde{G}v)$. Assumendo $u = \tilde{G}v$, segue dalla (3): $|\tilde{G}v|^2 = (\tilde{G}v, \tilde{G}v) = ((\tilde{G}v, v)) \leq |G|^{1/2} |\tilde{G}v| \|v\|$. Ne viene che $\tilde{G}$ è una trasformazione lineare e continua di Σ in S. Si ha inoltre, per ogni $v \in S$, $\tilde{G}v = Gv$. Pertanto $\tilde{G}$ è un prolungamento dell'operatore G da S a tutto Σ. Si ha per $u \in S$ e $v \in \Sigma : ((\tilde{G}u, v)) = (\tilde{G}u, \tilde{G}v) = (Gu, \tilde{G}v) = ((u, \tilde{G}v))$. Poiché è $\Sigma = \bar{S}$ (avendo indicato con $\bar{S}$ la chiusura di S nella topologia di Σ), segue che $\tilde{G}$ è un operatore hermitiano in Σ.

Essendo G, per ipotesi, strettamente positivo, il sistema $\{u_k\}$ è completo in S. Mostriamo che esso è altresì completo in Σ. Sia $v \in \Sigma$ tale che $((v, u_k)) = 0, (k = 1, 2, \cdots)$. Sarà quindi $(u_k, \tilde{G}v) = 0$ per ogni k, che implica $\tilde{G}v = 0$ e quindi per ogni $u \in S : ((u, v)) = (u, \tilde{G}v) = 0$. Ma essendo $\Sigma = \bar{S}$, deve essere $v = 0$.

Se poniamo $\tilde{u}_k, = \mu_k^{-1/2} u_k$, si ha $((\tilde{u}_h, \tilde{u}_k)) = (G\tilde{u}_h, \tilde{u}_k) = \mu_h (\tilde{u}_h, \tilde{u}_k) = \mu_h \mu_h^{-1/2} \mu_k^{-1/2} \delta_{hk} = \delta_{hk}$. Quindi il sistema $\{\tilde{u}_k\}$ è ortonormale e completo) in Σ. Abbiamo

$$\tilde{G}u = \sum_{k=1}^{\infty} ((\tilde{G}u, \tilde{u}_k)) \tilde{u}_k = \sum_{k=1}^{\infty} ((u, G\tilde{u}_k)) \tilde{u}_k = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k ((u, \tilde{u}_k)) \tilde{u}_k.$$

Si è così provato che $\tilde{G}$ è un operatore lineare compatto e strettamente positivo in Σ e che i suoi autovalori sono tutti e soli quelli di G, ciascuno con la stessa molteplicità e gli stessi autovettori che esso possiede come autovalore di G.

Sia ora $V^{(k)}$ la varietà lineare V, se è $k = 0$; se, invece, è $k > 0$, sia $V^{(k)}$ la totalità dei vettori v tali che $(v, u_h) = 0$ $(h = 1, 2, \cdots, k)$. Si ha

$$\min_{V^{(k-1)} - \{0\}} \frac{(Lv, v)}{|v|^2} = \lambda_k . \tag{4}$$

Se $\Sigma^{(k)}$ è il sottospazio di Σ costituito da tutti i vettori di Σ ortogonali a $u_1, u_2, \cdots, u_k$ ($\Sigma^{(k)} = \Sigma$ se $k = 0$), è ben noto che esiste il minimo del funzionale

$$I(u) = \frac{\| u \|^2}{((\tilde{G}u, u))}$$

in $\Sigma^{(k-1)} - \{0\}$ ed è uguale a μ_k^{-1}. Poniamo, per ogni $v \in V^{k-1}$, $u = Lv$. Il vettore u descrive una varietà lineare $\tilde{\Sigma}^{(k-1)}$ contenuta in $\Sigma^{(k-1)}$ quando v descrive tutta $V^{(k-1)}$. Si ha pertanto

$$\inf_{V^{(k-1)} - \{0\}} \frac{(Lv, v)}{|v|^2} = \inf_{\tilde{\Sigma}^{(k-1)} - \{0\}} \frac{\| u \|^2}{((\tilde{G}u, u))} .$$

Dato che il valore minimo del funzionale $I(u)$ in $\Sigma^{(k-1)} - \{0\}$ è raggiunto in corrispondenza al vettore $u_k = L(\lambda_k^{-1} u_k)$ appartenente a $\tilde{\Sigma}^{(k-1)}$, resta provata la (4).

Denoti ora $\{v_k\}$ un sistema completo di vettori linearmente indipendenti della varietà V. Considerata l'equazione secolare

$$\det \{(Lv_h, v_k) - \lambda (v_h, v_k)\} = 0 \qquad (h, k = 1, 2, \cdots, n) \tag{5}$$

essa ha tutte le sue radici reali e positive. Siano esse $\lambda_1^{(n)} \leq \lambda_2^{(n)} \leq \cdots \leq \lambda_n^{(n)}$. Si ha: $\lambda_k^{(n)} \geq \lambda_k^{(n+1)}$, $\lim_{n \to \infty} \lambda_k^{(n)} = \lambda_k$. Ciò consegue dal fatto che, posto $\mu_k^{(n)} = (\lambda_k^{(n)})^{-1}$ e $w_h = Lv_h$, i numeri $\mu_1^{(n)} \geq \mu_2^{(n)} \geq \cdots \geq \mu_n^{(n)}$ sono tutte le radici dell'equazione

$$\det \{((\tilde{G}w_h, w_k)) - \mu ((w_h, w_k))\} = 0 \tag{6}$$

e, quindi, essendo $\{w_h\}$ completo in Σ, per un noto teorema (cfr. [2] teor. 15, XIII) si ha: $\mu_k^{(n)} \leq \mu_k^{(n+1)}$, $\lim_{n \to \infty} \mu_k^{(n)} = \mu_k$. Da ciò l'asserto.

Ricordiamo che, se si indica con W_n la varietà lineare n-dimensionale determinata dai vettori $w_1, \cdots, w_n$ e con P_n il proiettore ortogonale di Σ su W_n, l'operatore $P_n \tilde{G} P_n$ di Σ ha come autovalori soltanto lo zero e le radici della (6) (cfr. [2] teor. 15, XIII).

LEMMA – *Sia* T *un operatore compatto e positivo (non necessariamente in senso stretto) dello spazio* Σ. *Sia* P *un proiettore ortogonale di* Σ *su un suo sottospazio. Siano* $\nu_1 \geq \nu_2 \geq \cdots \geq \nu_k \geq \cdots > 0$ *tutti gli autovalori positivi di* PTP *(ciascuno ripetuto un numero di volte pari alla rispettiva molteplicità) e,* *detta* $T^{1/2}$ *la radice quadrata positiva di* T, *siano* $\nu'_1 \geq \nu'_2 \geq \cdots \geq \nu'_k \geq \cdots > 0$ *tutti quelli di* $T^{1/2} P T^{1/2}$. *Si ha* $\nu_k = \nu'_k$ $(k = 1, 2, \cdots)$.

Sia ν autovalore positivo per PTP. Sia cioè $PTPv - \nu v = 0$ con $v \neq 0$. Sarà allora $v = Pv$ e quindi

$$PTv - \nu v = 0. \tag{7}$$

Poniamo $u = T^{1/2} v$. Se fosse $u = 0$, sarebbe $PTv = PT^{1/2} u = 0$ ed in conseguenza, per la (7), $v = 0$. Dalla (7) segue $PT^{1/2} u - \nu v = 0$. Ne viene $T^{1/2} PT^{1/2} u - \nu u = 0$. Quindi ν è autovalore per $T^{1/2} P T^{1/2}$.
Sia ora – per ipotesi – ν autovalore positivo per $T^{1/2} P T^{1/2}$, cioè $T^{1/2} PT^{1/2} u - \nu u = 0$ con $u \neq 0$. Poniamo $v = P T^{1/2} u$. Si ha

$$T^{1/2} v = \nu u \tag{8}$$

e quindi non può essere $v = 0$. Si ha d'altra parte dalla (8): $PTv = \nu PT^{1/2} u$, cioè $PTv - \nu v = 0$. Ne viene $v = Pv$ e quindi $PTPv - \nu v = 0$. Cioè ν è autovalore per PTP.

Sia s la molteplicità dell'autovalore positivo ν di PTP. Sia $v_1, \cdots, v_s$ un sistema completo di autovettori corrispondente a ν. Posto $u_k = T^{1/2} v_k$, per quanto si è visto u_k è autosoluzione di $T^{1/2} PT^{1/2} u - \nu u = 0$. Sia

$$\sum_{k=1}^{s} c_k u_k = 0. \tag{9}$$

Poniamo $v = \sum_{k=1}^{s} c_k v_k$. Si ha $PTPv - \nu v = 0$ e quindi $PTv - \nu v = 0$. Dalla (9) segue $T^{1/2} v = 0$ e quindi $Tv = 0$. Ne viene $v = \nu^{-1} PTv = 0$. Deve allora essere $c_1 = \cdots = c_s = 0$. Si è così provato che la molteplicità di ν come autovalore di $T^{1/2} PT^{1/2}$ è non inferiore ad s. Se u^* è autosoluzione di $T^{1/2} PT^{1/2} u - \nu u = 0$, per quanto si è visto sopra (cfr. la (8)), deve esistere una autosoluzione v^* di $PTPv - \nu v = 0$ tale che $u^* = T^{1/2} v^*$. Segue da ciò che u^* deve necessariamente potersi esprimere come combinazione lineare di $u_1, \cdots, u_s$. Pertanto la molteplicità di ν come autovalore di $T^{1/2} PT^{1/2}$ è esattamente s.

Consideriamo ora la seguente ipotesi

β) *L'operatore* G *appartiene alla classe* $\mathcal{C}^2$ (*cfr.* [2] *pag.* 146 *e* [3] *pag.* 336). *Esiste una successione di operatori compatti positivi* $\{G_\rho\}$ *appartenenti a* $\mathcal{C}^2$ *non crescente e convergente uniformemente a* G (cioè tale che $\lim_{\rho \to \infty} | G_\rho - G | = 0$) *e tale inoltre che per ogni* ρ *sia numericamente noto l'invariante ortogonale* $\mathfrak{I}_1^2 (G_\rho)$.

In [2] e [3] è stato provato che la ipotesi β) è soddisfatta per problemi al contorno relativi alle equazioni ed ai sistemi lineari alle derivate parziali di tipo ellittico che includono quelli classici della fisica-matematica.

Si ha (cfr. [2] pag. 160) la seguente limitazione inferiore per λ_k

$$\lambda_k > \left\{ \frac{1}{(\lambda_k^{(n)})^2} + \mathfrak{I}_1^2 (G_\rho) - \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{(\lambda_h^{(n)})^2} \right\}^{-1/2} \tag{10}$$

Inoltre il secondo membro non decresce quando gli indici n e ρ crescono e tende a λ_k se entrambi gli indici n e ρ tendono all'infinito [(2)].

Dimostreremo ora un teorema il quale risolve la questione alla quale è dedicata la presente Nota, fornendo un metodo per il miglioramento della approssimazione per difetto data dalla (10). Chiameremo tale metodo PRIMO METODO DI MIGLIORAMENTO.

1° TEOREMA – *Siano verificate le ipotesi* α) *e* β). *Sia* $\{v_k\}$ *un sistema di vettori di* V *linearmente indipendenti e completo in* V. *Siano* $z_1, \cdots, z_q$, q *vettori* ($q \geq 2$) *di* V, *linearmente indipendenti e tali che* $\mathrm{L}z_r \in \mathrm{V}$ ($r = 1, \cdots, q$). *Si ha:*

$$\boxed{\lambda_k > \left\{ \frac{1}{(\lambda_k^{(n)})^2} + \mathfrak{J}_1^2(\mathrm{G}_\rho) - \sum_{h=1}^{n} \frac{1}{(\lambda_h^{(n)})^2} - \sum_{i=2}^{q} \nu_i^{(q)} \right\}^{-1/2}} \tag{11}$$

essendo $\lambda_1^{(n)} \leq \cdots \leq \lambda_n^{(n)}$ *le radici dell'equazione* (5) *e* $\nu_1^{(q)} \geq \nu_2^{(q)} \geq \cdots \geq \nu_q^{(q)}$ *le* q *radici* (*tutte non negative*) *dell'equazione secolare*

$$\det \left\{ (z_r, \mathrm{L}z_s) - \sum_{i,k}^{1,n} \beta_{ik} (\mathrm{L}z_r, v_i)(v_k, \mathrm{L}z_s) - \nu (\mathrm{L}z_r, \mathrm{L}^2 z_s) \right\} = 0. \tag{12}$$

$$(r, s = 1, 2, \cdots, q).$$

Con $\{\beta_{ik}\}$ *si è indicata la matrice* $n \times n$ *inversa della matrice* $\{(\mathrm{L}v_i, v_k)\}$.

Possono sempre scegliersi i vettori z_r in modo tale che le radici della (12) siano tutte positive. Ciò seguirà dalla dimostrazione che stiamo per esporre. La (11) fornisce pertanto il miglioramento cercato della (10).

Considerati i numeri, già in precedenza introdotti, $\mu_k = \lambda_k^{-1}$ e $\mu_k^{(n)} = (\lambda_k^{(n)})^{-1}$, si osservi che l'operatore $\tilde{\mathrm{G}}^2$ ha come autovalori i numeri μ_k^2 e l'operatore $(\mathrm{P}_n \tilde{\mathrm{G}} \mathrm{P}_n)^2$ (con P_n già sopra definito) ha come autovalori positivi i numeri $(\mu_k^{(n)})^2$. Essendo $(\mathrm{P}_n \tilde{\mathrm{G}} \mathrm{P}_n)^2 = \mathrm{P}_n \tilde{\mathrm{G}} \mathrm{P}_n \tilde{\mathrm{G}} \mathrm{P}_n$, segue, in virtù del lemma dianzi dimostrato, che i numeri $(\mu_k^{(n)})^2$ ($k = 1, \cdots, n$) sono tutti e soli gli autovalori positivi di $(\tilde{\mathrm{G}} \mathrm{P}_n \tilde{\mathrm{G}})^{1/2} \mathrm{P}_n (\tilde{\mathrm{G}} \mathrm{P}_n \tilde{\mathrm{G}})^{1/2}$ (assumendo come determinazione della radice quadrata quella positiva). Per un noto risultato si ha:

$$\mu_k^2 - (\mu_k^{(n)})^2 \leq \| \tilde{\mathrm{G}}^2 - (\tilde{\mathrm{G}} \mathrm{P}_n \tilde{\mathrm{G}})^{1/2} \mathrm{P}_n (\tilde{\mathrm{G}} \mathrm{P}_n \tilde{\mathrm{G}})^{1/2} \| \text{ [(3)]}. \tag{13}$$

(2) Se fosse noto il valore numerico di $\mathfrak{J}_1^2(\mathrm{G})$ – cosa che in generale non si verifica – allora nella (10) a $\mathfrak{J}_1^2(\mathrm{G}_\rho)$ potrebbe sostituirsi $\mathfrak{J}_1^2(\mathrm{G})$ e si otterrebbe la formula di Trefftz menzionata nell'introduzione.

(3) Sussiste infatti il seguente teorema: *Se* T *e* T′ *sono due operatori lineari compatti e positivi di uno spazio di Hilbert* Σ, *detti* $\mu_1 \geq \mu_2 \cdots \geq \mu_k \geq \cdots$ *gli autovalori di* T *e* $\mu'_1 \geq \mu'_2 \geq \cdots \geq \mu'_k \geq \cdots$ *quelli di* T′, *si ha*

$$| \mu_k - \mu'_k | \leq \| \mathrm{T} - \mathrm{T}' \|.$$

La dimostrazione segue immediatamente dalla cosidetta *proprietà di minimax* degli auto-

Si ha anche: $(((\tilde{G}P_n\tilde{G})^{1/2} P_n (\tilde{G}P_n \tilde{G})^{1/2} u , u)) = \| P_n (\tilde{G}P_n \tilde{G})^{1/2} u \|^2 \leq (((\tilde{G}P_n \tilde{G})^{1/2} u, (\tilde{G}P_n \tilde{G})^{1/2} u)) = ((\tilde{G}P_n \tilde{G}u , u))$. Ciò significa

$$(14) \qquad (\tilde{G}P_n \tilde{G})^{1/2} P_n (\tilde{G}P_n \tilde{G})^{1/2} \leq \tilde{G}P_n \tilde{G}.$$

D'altra parte riesce: $((\tilde{G}P_n \tilde{G}u , u)) = \| P_n \tilde{G}u \|^2 \leq \| \tilde{G} u \|^2 = ((\tilde{G}^2 u , u))$ e quindi si ha: $(\tilde{G}P_n \tilde{G})^{1/2} P_n (\tilde{G}P_n \tilde{G})^{1/2} \leq \tilde{G}^2$. Ne segue la positività dell'operatore $R_n = \tilde{G}^2 - (\tilde{G}P_n \tilde{G})^{1/2} P_n (\tilde{G}P_n \tilde{G})^{1/2}$. Siano $\xi_1^{(n)} \geq \xi_2^{(n)} \geq \cdots \geq \xi_h^{(n)} \geq \cdots$ gli autovalori dell'operatore R_n (ovviamente compatto). Detto $\{x_h\}$ un qualsiasi sistema ortonormale e completo in Σ, si consideri l'invariante ortogonale $\mathfrak{I}_1^1(R_n) = \sum_{h=1}^{\infty} (R_n x_h , x_h)$. Si ha anche

$$(15) \quad \mathfrak{I}_1^1(R_n) = \sum_h \xi_h^{(n)} = \mathfrak{I}_1^1(\tilde{G}^2) - \mathfrak{I}_1^1[(\tilde{G}P_n \tilde{G})^{1/2} P_n (\tilde{G}P_n \tilde{G})^{1/2}] = \sum_{h=1}^{\infty} \mu_h^2 - \sum_{h=1}^{n} (\mu_h^{(n)})^2 .$$

Poniamo $y_r = L^2 z_r$ $(r = 1 , \cdots , q)$. Sia Π_q il proiettore ortogonale di Σ sulla varietà lineare q-dimensionale determinata da $y_1 , \cdots , y_q$. Si ha, tenendo anche conto che R_n è non degenere,

$$(16) \qquad \xi_1^{(n)} = \|R_n\| < \mathfrak{I}_1^1(R_n) - \mathfrak{I}_1^1(\Pi_q R_n \Pi_q) + \|\Pi_q R_n \Pi_q\| .$$

Ma si ha per la (14): $R_n = \tilde{G}^2 - (\tilde{G}P_n \tilde{G})^{1/2} P_n (\tilde{G}P_n \tilde{G})^{1/2} \geq \tilde{G}^2 - \tilde{G}P_n \tilde{G}$ e quindi $\Pi_q R_n \Pi_q \geq \Pi_q (\tilde{G}^2 - \tilde{G}P_n \tilde{G}) \Pi_q$. Ne segue:

$$(17) \quad \mathfrak{I}_1^1(\Pi_q R_n \Pi_q) - \|\Pi_q R_n \Pi_q\| \geq \mathfrak{I}_1^1[\Pi_q(\tilde{G}^2 - \tilde{G}P_n \tilde{G}) \Pi_q] - \|\Pi_q (\tilde{G}^2 - \tilde{G}P_n \tilde{G}) \Pi_q\|$$

e quindi per le (13), (15), (16), (17) e per l'ipotesi β),

$$(18) \qquad \mu_k^2 - (\mu_k^{(n)})^2 < \mathfrak{I}_1^2(G_Q) - \sum_{h=1}^{n} (\mu_h^{(n)})^2 - \sum_{i=2}^{q} \nu_i^{(q)}$$

essendo $\nu_1^{(q)} \geq \nu_2^{(q)} \geq \cdots \geq \nu_q^{(q)}$ le radici, tutte non negative, dell'equazione secolare

$$(19) \qquad \det \{ ((\tilde{G} y_r , y_s)) - ((\tilde{G}P_n \tilde{G}y_r , y_s)) - \nu ((y_r , y_s)) \} = 0$$
$$(r , s = 1 , 2 , \cdots , q).$$

valori. Essa afferma che se $w_1 , \cdots , w_{k-1}$ sono $k - 1$ arbitrari vettori di Σ e $W^{(k-1)}$ il complemento ortogonale della varietà di dimensione finita da essi individuata, posto

$$\sigma_k (w_1 , \cdots , w_{k-1}) = \max_{W^{(k-1)} - \{0\}} \frac{(Tu , u)}{|u|^2} ,$$

si ha: $\mu_k = \min \sigma_{k-1} (w_1 , \cdots , w_{k-1})$; il minimo di σ_{k-1} essendo inteso al variare comunque di $w_1 , \cdots , w_{k-1}$ in Σ. Assumendo $w_1 = u_1' , \cdots , w_{k-1} = u_{k-1}'$, si ha:

$$\mu_k \leq \max_{W^{(k-1)} - \{0\}} \frac{(Tu , u)}{|u|^2} \leq \max_{W^{(k-1)} - \{0\}} \frac{((T - T') u , u)}{|u|^2} + \max_{W^{(k-1)} - \{0\}} \frac{(T' u , u)}{|u|^2} \leq \|T - T'\| + \mu_k' .$$

Quindi $\mu_k - \mu_k' \leq \| T - T' \|$. Mutando le veci fra T e T' segue la tesi.

Tenendo presente che è $P_n' u = \sum_{ik}^{1,n} \beta_{ik} ((u , Lv_i)) Lv_k$, si riconosce, con calcoli del tutto elementari, che la (19) altro non è che la (12), talché la (18) equivale alla diseguaglianza (11) che era da dimostrare.

È opportuno osservare che per l'applicazione numerica della (11) non occorre calcolare *tutte* le radici della (12), ma soltanto la $\nu_1^{(q)}$ (cioè la massima) e la somma $\sigma^{(q)} = \sum_{i=1}^{q} \nu_i^{(q)}$ di tutte le radici della (12). È ben noto che il calcolo numerico della radice di massimo modulo di una equazione secolare può ottenersi con diversi semplici procedimenti, laddove il calcolo di $\sigma^{(q)}$ si consegue senza bisogno di risolvere la (12).