Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Pietro Benvenuti

Sul problema ergodico ristretto

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.4, p. 478–480.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_4_478_0>

Meccanica. — *Sul problema ergodico ristretto* (*). Nota di PIETRO BENVENUTI, presentata (**) dal Socio D. GRAFFI.

SUMMARY. — For a given stationary process $(X, \mathcal{A}, m, T_t)$, let $\mathcal{B}$ be a sub-field of measurable sets and $\mathcal{C}$ the sub-field of all invariable sets. The mutual independence of the two sub-fields $\mathcal{B}$ and $\mathcal{C}$ is a necessary and sufficient condition for the ergodicity of every random variable $\mathcal{B}$–measurable and integrable.

1. INTRODUZIONE. – In un precedente lavoro (1) si è stabilita una condizione necessaria e sufficiente per la ergodicità di una determinata funzione di fase sommabile in relazione ad un assegnato processo stazionario $(X, \mathcal{A}, m, T_t)$ continuo o discreto (2). Tale condizione è la meno restrittiva possibile tra tutte quelle che riguardano la ergodicità poiché si riferisce ad una singola funzione di fase $f(x)$ ed è espressa dalla equazione:

$$\bar{f}_C = \frac{1}{mC} \int_C f(x)\, dm = \int_X f(x)\, dm = \bar{f}_X \tag{1.1}$$

da intendersi valida per tutti gli insiemi C di misura non nulla appartenenti alla sotto–σ–algebra $\mathcal{C}$ formata da tutti gli insiemi che sono invarianti per le trasformazioni T_t.

Valendosi di questo risultato, nel presente lavoro si è stabilita una condizione di ergodicità, relativa ad un problema meno ristretto, riguardante la famiglia delle funzioni di fase che sono misurabili rispetto ad una assegnata sotto–σ–algebra $\mathcal{B}$ di insiemi misurabili. La condizione necessaria e sufficiente per la ergodicità di tutte queste funzioni è tradotta in maniera espressiva dalla indipendenza della σ–algebra $\mathcal{B}$ dalla σ–algebra $\mathcal{C}$ degli insiemi invarianti.

Questa condizione risolve in maniera completa il problema ergodico ristretto, nel senso in cui più comunemente è intesa questa espressione, e generalizza sensibilmente un risultato già ottenuto per altra via da B. Forte.

2. ALGEBRE ERGODICHE. – Sia $\mathcal{B}$ una sotto–σ–algebra di insiemi misurabili ($\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$) cioè una sottofamiglia di insiemi di $\mathcal{A}$, chiusa rispetto alla formazione del complemento e della unione di un numero finito o di una infinità numerabile di insiemi. Nella classe L delle variabili aleatorie (a valor medio finito) dello spazio di probabilità $(X, \mathcal{A}, m)$, si considerino quelle

(*) Lavoro svolto nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 7 del Comitato per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta dell'8 aprile 1967.

(1) P. BENVENUTI, *Sul problema ergodico relativo ad una singola funzione*, « Rendiconti della Accademia dei Lincei », vol. XLII, fasc. 3 (1967).

(2) X è lo spazio delle fasi, $\mathcal{A}$ è una σ–algebra di sottoinsiemi di X (insiemi misurabili), m è una misura di probabilità, T_t è un semigruppo continuo (t reale ≥ 0) o discreto (t intero ≥ 0) di trasformazioni di X in sé che conservano la misura m.

particolari variabili aleatorie che sono anche $\mathfrak{B}$–misurabili [3]; esse formano una sottoclasse $L^{\mathfrak{B}}$ tanto più ampia quanto più ampia è la σ–algebra $\mathfrak{B}$. Diremo che la σ–algebra $\mathfrak{B}$ è *ergodica* se ogni variabile aleatoria $f(x) \in L^{\mathfrak{B}}$ è ergodica rispetto al processo stazionario considerato. Il problema ergodico *ristretto* consiste nel determinare condizioni necessarie e sufficienti per la ergodicità della σ–algebra $\mathfrak{B}$. Valendosi della (1.1) si riconosce la validità del seguente:

TEOREMA: *Condizione necessaria e sufficiente affinché la σ–algebra $\mathfrak{B}$ sia* ergodica *è che essa sia* indipendente *dalla σ–algebra $\mathfrak{C}$ degli insiemi che risultano invarianti subordinatamente al processo stazionario considerato. In altri termini per ogni* $B \in \mathfrak{B}$ *di misura non nulla e per ogni* $C \in \mathfrak{C}$ *di misura non nulla deve essere:*

$$m(B \cap C) = mB \cdot mC \,. \tag{2.1}$$

Per riconoscerlo si consideri, in corrispondenza ad un assegnato insieme invariante C di misura non nulla, la immersione F_C di C in X. La F_C è definita soltanto per i punti $x \in C$ per i quali è rappresentata dalla identità $F_C(x) = x$. Si consideri inoltre la σ–algebra $\mathfrak{A}_C$ formata dai sottoinsiemi di C che sono misurabili, cioè appartengono ad $\mathfrak{A}$. La immersione F_C definisce una trasformazione misurabile dello spazio $(C, \mathfrak{A}_C)$ nello spazio $(X, \mathfrak{B})$; infatti la immagine inversa di un qualunque insieme B di $\mathfrak{B}$ appartiene ad $\mathfrak{A}_C$:

$$F_C^{-1} B = B \cap C \in \mathfrak{A}_C$$

Posto poi:

$$\mu_C B = m F_C^{-1} B = m(B \cap C)$$

in virtù del teorema di integrazione per sostituzione [4], per ogni $f(x) \in L^{\mathfrak{B}}$ è:

$$\int_X f(x)\, d\mu_C = \int_C f(x)\, dm \,.$$

Per la (1.1), condizione necessaria e sufficiente affinché $\mathfrak{B}$ sia ergodica è che per ogni $C \in \mathfrak{C}$ di misura non nulla e per ogni $f(x) \in L^{\mathfrak{B}}$ risulti:

$$\int_X f(x)\, d\mu_C = mC \int_X f(x)\, dm \,. \tag{2.2}$$

Fissato C, condizione necessaria e sufficiente affinché la (2.2) sia verificata per ogni $f(x) \in L^{\mathfrak{B}}$ è che per ogni $B \in \mathfrak{B}$ sia:

$$\mu_C B = mC \cdot mB \,.$$

Pertanto, condizione necessaria e sufficiente affinché $\mathfrak{B}$ sia ergodica è che per ogni $C \in \mathfrak{C}$ di misura non nulla e per ogni $B \in \mathfrak{B}$ sia:

$$m(B \cap C) = \mu_C B = mB \cdot mC \,.$$

(3) Tali cioè che le immagini inverse dei borelliani dell'asse reale appartengano non soltanto ad $\mathfrak{A}$ ma anche a $\mathfrak{B}$.

(4) Cfr. P. R. HALMOS, *Measure Theory*, Van Nostrand (1950) Sec. 39.

Quest'ultima equazione è verificata in ogni caso per gli insiemi B di misura nulla ed il teorema risulta così dimostrato.

3. CONSEGUENZE. – Dal teorema stabilito si riconosce in generale che affinché B sia *ergodica* è *necessario* che la intersezione $\mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$ delle due σ–algebre $\mathfrak{B}$ e $\mathfrak{C}$, cioè la famiglia degli insiemi che appartengono sia alla σ–algebra $\mathfrak{B}$ sia alla σ–algebra $\mathfrak{C}$, contenga soltanto insiemi di misura nulla o unitaria. Infatti se $B \in \mathfrak{B} \cap \mathfrak{C}$, posto nella (2.1) $B = C$, si ottiene: $m B = m(B \cap B) = (m B)^2$ e quindi deve essere $m B = 0$ oppure $m B = 1$. Questa condizione che esprime una *transitività metrica ristretta* alla σ–algebra $\mathfrak{B}$, non è però *sufficiente* in generale per la ergodicità di $\mathfrak{B}$ (5).

Inoltre il teorema stabilito contiene come caso particolare un risultato di B. Forte (6) che stabilisce una condizione necessaria e sufficiente per la ergodicità di ogni variabile aleatoria $\varphi[f(x)]$ che sia funzionalmente dipendente da una variabile aleatoria assegnata $f(x)$. Per ottenere questo risultato basta specializzare la σ–algebra $\mathfrak{B}$ in quella formata dalle immagini inverse $f^{-1} b$ dei borelliani b dell'asse reale; la famiglia $L^{\mathfrak{B}}$ delle variabili aleatorie $\mathfrak{B}$–misurabili coincide allora con la famiglia delle variabili aleatorie funzionalmente dipendenti dalla $f(x)$. In virtù del teorema stabilito si riconosce allora che condizione necessaria e sufficiente per la ergodicità di tutte le variabili aleatorie $\varphi[f(x)]$ è che per ogni borelliano b e per ogni insieme invariante C di misura non nulla sia (7):

$$m(C \cap f^{-1} b) = m C \cdot m f^{-1} b . \tag{3.1}$$

La equazione (3.1) esprime la condizione che i valori assunti dalla variabile aleatoria $f(x)$ su un insieme invariante C di misura non nulla, abbiano la stessa legge di distribuzione relativa, qualunque sia l'insieme invariante C di misura non nulla. Questa condizione è effettivamente più restrittiva della condizione (1.1) relativa alla ergodicità della sola $f(x)$; questo conferma il fatto che una variabile aleatoria può essere ergodica senza che debbano risultare ergodiche tutte le variabili aleatorie funzionalmente dipendenti da essa.

(5) La condizione di transitività metrica ristretta risulta anche sufficiente se $\mathfrak{B}$ è invariante per le trasformazioni T_t, cioè se queste trasformazioni sono $\mathfrak{B}$–misurabili. In questo caso risulta definito un processo stazionario $(X, \mathfrak{B}, m, T_t)$ che gode della proprietà di transitività metrica.

(6) B. FORTE, *Sulla ergodicità della trasformazione indotta mediante una variabile aleatoria*, «Calcolo», vol. 2 (1965).

(7) Nel lavoro di B. Forte la condizione è espressa in forma diversa: per ogni borelliano b e per ogni suddivisione di X in due parti invarianti di misura non nulla C e $C' = X - C$, si richiede che sia:

$$\frac{m(C \cap f^{-1} b)}{m C} = \frac{m(C' \cap f^{-1} b)}{m C'}$$

essendo però $m C' = 1 - m C$ e $m(C' \cap f^{-1} b) = m f^{-1} b - m(C \cap f^{-1} b)$, la equazione soprascritta risulta equivalente alla (3.1).