Emanoil Arghiriade

Remarques sur l'inverse généralisée di un produit de matrices

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.5, p. 621–625.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_5_621_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1967.

Algebra. — *Remarques sur l'inverse généralisée d'un produit de matrices.* Nota di EMANOIL ARGHIRIADE, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si dànno due tipi di condizioni necessarie e sufficienti affinché l'inversa generalizzata del prodotto di due date matrici uguagli il prodotto delle inverse generalizzate delle due matrici prese in ordine inverso.

1. Etant donnée une matrice A $(p \times n)$ dont les élements sont des nombres complexes, l'inverse généralisée de Moore-Penrose (brièvement i.g.) [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7] est la solution unique du système

$$\text{(1)} \qquad AXA = A \quad , \quad XAX = X \quad , \quad (AX)^* = AX \quad , \quad (XA)^* = XA$$

A^* étant la matrice transposé et complexe conjuguée $A^* = \bar{A}'$; nous représentons $X(n \times p)$ par $A^{(-1)}$.

La relation

$$\text{(2)} \qquad (AB)^{(-1)} = B^{(-1)} A^{(-1)}$$

n'est pas valable en général; on sait qu'elle est valable dans certains cas particuliers [8; p. 1], [9; p. 246]: 1°. une des matrices A ou B est unitaire; 2° $B = A^*$; 3° $B = A^{(-1)}$; 4°. si pour les matrices $A(p \times r)$, $B(r \times n)$ on a rang A = rang B = r. Une condition suffisante, mais non nécessaire, a été donnée par Ben Israel et A. Charnes [10; p. 433].

D. Dokovič [11] a indiqué deux conditions géométriques qui, prises ensemble, sont nécessaire et suffisantes pour que la formule (2) soit valable.

2. Un grand nombre de conditions nécessaires et suffisantes ont été donnée par T.N.E. Greville [8] qui a considéré les relations suivantes:

$$\text{(3)} \qquad A^{(-1)} ABB^* A^* = BB^* A^* \quad ; \quad BB^{(-1)} A^* AB = A^* AB,$$

$$\text{(4)} \qquad A^{(-1)} ABB^* = BB^* A^{(-1)} A \quad ; \quad A^* ABB^{(-1)} = BB^{(-1)} A^* A,$$

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} A^{(-1)} ABB^* A^* ABB^{(-1)} = BB^* A^* A \\ BB^{(-1)} A^* ABB^* A^{(-1)} A = A^* ABB^* \end{cases}$$

$$\text{(6)} \qquad A^{(-1)} AB = B(AB)^{(-1)} AB \quad ; \quad BB^{(-1)} A^* = A^* AB(AB)^{(-1)},$$

$$\text{(7)} \qquad (I - BB^{(-1)}) A^* ABB^{(-1)} = \theta \quad ; \quad (I - A^{(-1)} A) BB^* A^{(-1)} A = \theta,$$

$$\text{(8)} \qquad A^{(-1)} ABB^{(-1)} = BB^{(-1)} A^{(-1)} A$$

(I est la matrice unité et θ la matrice nulle), et a démontré: la relation (2) est valable si, et seulement si les deux relations (3) sont vérifiées; il en est de même de (4), (5), (6), (7); la relation (8) est seulement nécessaire.

(*) Nella seduta del 13 maggio 1967.

3. Rappelons quelques résultats. Considérons les matrices $A(q \times n)$ et $B(n \times p)$ et les espaces unitaires $\mathfrak{L}_p$, $\mathfrak{L}_n$, $\mathfrak{L}_q$. Nous représentons les opérateurs définis par ces matrices par les mêmes lettres. L'opérateur B applique $\mathfrak{L}_p \to \mathfrak{L}_n$ et A, $\mathfrak{L}_n \to \mathfrak{L}_q$. Posons $A = (\alpha_{ik})_q^n$, $B = (\beta_{ik})_n^p$. Pour $x \in \mathfrak{L}_p$, $y \in \mathfrak{L}_n$ les images Bx, Ay, $(AB)x$ forment dans $\mathfrak{L}_n$, $\mathfrak{L}_q$, $\mathfrak{L}_q$ resp. les sous espaces $\mathfrak{R}(B)$, $\mathfrak{R}(A)$, $\mathfrak{R}(AB)$.

L'opérateur B^* applique $\mathfrak{L}_n \to \mathfrak{L}_p$ et $\mathfrak{R}(B^*)$ est le sous espace déterminé par les colonnes de B^*, $c_i = \bar{\beta}_{i1} e_1 + \cdots + \bar{\beta}_{ip} e_p$ $(i = 1, \cdots, n)$; $e_1, \cdots, e_p$ étant une base orthonormée dans $\mathfrak{L}_p$.

L'espace nul (le noyaux) N (B) est un sous espace de $\mathfrak{L}_p$ détérminé par les vecteurs $x = x_1 e_1 + \cdots + x_p e_p$ qui vérifient le système.

$$\beta_{i1} x_1 + \cdots + \beta_{ip} x_p = 0, \qquad (i = 1, \cdots, n) ;$$

en tenant compte de l'expression du produit scalaire dans une base orthonormée, cette relation peut s'ecrire $(c_i, x) = 0$ $(i = 1, \cdots, n)$, ce qui prouve que $\mathfrak{R}(B^*) \perp N(B)$. On a des relations analogues pour $N(A)$, $N(AB)$.

Nous avons les sommes orthogonales

$$\begin{aligned} &\mathfrak{L}_n = \mathfrak{R}(A^*) \oplus N(A) = \mathfrak{R}(B) \oplus N(B^*), \\ &N(A) \perp \mathfrak{R}(A^*) \quad ; \quad \mathfrak{R}(B) \perp N(B^*), \\ &\mathfrak{L}_p = \mathfrak{R}(B^*) \oplus N(B) \quad ; \quad \mathfrak{L}_q = \mathfrak{R}(A) \oplus N(A^*), \\ &\mathfrak{R}(B^*) \perp N(B) \quad ; \quad \mathfrak{R}(A) \perp N(A^*). \end{aligned}$$

On sait – et cela se démontre facilement – que B determine une application biunivoque de $\mathfrak{R}(B^*)$ sur $\mathfrak{R}(B)$ et B^* une application biunivoque de $\mathfrak{R}(B)$ sur $\mathfrak{R}(B^*)$; on a des relations analogues pour A, A^* et AB, $(AB)^*$.

On sait [8; p. 518], [12; p. 445), [13; p. 680), [11; p. 51] que $BB^{(-1)}$ et $B^{(-1)}B$ sont les projecteurs orthogonaux de $\mathfrak{R}(B)$ et $\mathfrak{R}(B^*)$ resp. Donc pour $x \in \mathfrak{L}_p \Rightarrow x = x_1 + x_2$, $x_1 \in \mathfrak{R}(B^*)$, $x_2 \in N(B)$, $B^{(-1)} Bx = x_1$. Pour $y \in \mathfrak{L}_n \Rightarrow$ $\Rightarrow y = y_1 + y_2$, $y_1 \in \mathfrak{R}(B)$, $y_2 \in N(B^*)$. $BB^{(-1)} y = y_1$. On a des relations analogues pour $\mathfrak{R}(A)$, $\mathfrak{R}(A^*)$.

LEMME 1. – *Etant données deux matrices quelconques* A *et* B, *pour lesquelles on peut effectuer le produit* AB, *on a*

$$\text{rang } BB^* A^* = \text{rang } A^* AB = \text{rang } AB. \tag{9}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} &\text{rang } AB = \text{rang } (AB)^* = \text{rang } B^* A^* \geq \text{rang } BB^* A^*, \\ &\text{rang } BB^* A^* \geq \text{rang } ABB^* A^* = \text{rang } AB\,(AB)^* = \text{rang } AB; \end{aligned}$$

donc rang $BB^* A^*$ = rang AB; d'une manière analogue on démontre que rang $A^* AB$ = rang AB.

LEMME 2. – *Dans les mêmes hypothèses que précédemment, on a* aussi

$$\text{dimens } [R(A^*) \cap R(B)] \leq \text{rang } AB \tag{11}$$

Posons

$$\sigma = \mathfrak{R}(A^*) \cap \mathfrak{R}(B).$$

Nous avons les relations

$$\mathfrak{R}(AB) = (AB)\,\mathfrak{L}_p = A\,(B\mathfrak{L}_p) = A\,[\mathfrak{R}(B)] \subset \mathfrak{R}(A).$$

Puisque $A\,[\mathfrak{R}(B)] = \mathfrak{R}(AB)$ et puisque $\sigma \subseteq \mathfrak{R}(B)$, il en résulte

$$A\sigma \subset \mathfrak{R}(AB) \Rightarrow \text{dimens } A\sigma \leq \text{rang } AB. \tag{12}$$

Mais on a aussi

$$\sigma \subseteq \mathfrak{R}(A^*) \quad , \quad A\sigma \subset \mathfrak{R}(A)\,; \tag{13}$$

et, comme A établit une correspondance biunivoque entre $\mathfrak{R}(A^*)$ et $\mathfrak{R}(A)$, on deduit de (13) en tenant compte de (12)

$$\text{dimens } \sigma = \text{dimens } A\sigma \leq \text{rang } AB.$$

4. T.N.E. Greville [8; p. 520] a démontré que si la première relation (3)

$$A^{(-1)}ABB^*A^* = BB^*A^* \tag{14}$$

est vérifiée, alors $\mathfrak{R}(A^*)$ est un sous espace invariant de BB^*, donc

$$BB^*\,[\mathfrak{R}(A^*)] \subset \mathfrak{R}(A^*)\,; \tag{15}$$

et, si la seconde relation (3)

$$BB^{(-1)}A^*AB = A^*AB \tag{16}$$

est vérifiée alors $\mathfrak{R}(B)$ est un sous espace invariant de A^*A, donc

$$A^*A\,[\mathfrak{R}(B)] \subset \mathfrak{R}(B). \tag{17}$$

Ainsi de (14) et (16) on déduit resp. (15) et (17). Remarquons que la réciproque est aussi vraie. Supposon que (14) est vérifieé. Pour $z \in \mathfrak{L}_q$ on a $A^*z \in \mathfrak{R}(A^*)$. Nous avons aussi, puisque $A^*z \in \mathfrak{R}(A^*)$ et en tenant compte de (15),

$$BB^*(A^*z) \subset \mathfrak{R}(A^*) \quad , \quad z \in \mathfrak{L}_q.$$

Comme $A^{(-1)}A$ est le projecteur orthogonal de $\mathfrak{R}(A^*)$, tout vecteur de $\mathfrak{R}(A^*)$ se projette en lui même $(A^{(-1)}ABB^*A^*).z = (BB^*A^*)\,z$ pour tout $z \in \mathfrak{L}_q$, d'où il résulte (14). De même, de (17) il en résulte (16). *Les deux relations* (3) *sont equivalentes resp. á* (15) et (17).

5. Supposons que (15) est vérifiée:

$$BB^*\,[\mathfrak{R}(A^*)] = BB^*\,[A^*\mathfrak{L}_q] = (BB^*A^*)\,\mathfrak{L}_q = \mathfrak{R}(BB^*A^*);$$

si (17) est vérifiée, on déduit d'une manière analogue $A^*A\,[\mathfrak{R}(B)] = \mathfrak{R}(A^*AB)$; de sorte que les *formules* (15) *et* (17), *donc aussi les formules* (3), *peuvent s'écrire*

$$\mathfrak{R}(BB^*A^*) \subset \mathfrak{R}(A^*) \quad ; \quad \mathfrak{R}(A^*AB) \subset \mathfrak{R}(B). \tag{18}$$

Mais on a evidemment

$$\mathfrak{R}\,(\mathrm{BB}^*\,\mathrm{A}^*) = (\mathrm{BB}^*\,\mathrm{A}^*)\,\mathfrak{L}_q = \mathrm{B}\,[\mathrm{B}^*\,\mathrm{A}^*\,\mathfrak{L}_q] \subset \mathfrak{R}\,(\mathrm{B}).$$

Donc, si (15) est vérifiée, on a

$$\mathfrak{R}\,(\mathrm{BB}^*\,\mathrm{A}^*) \subset \mathfrak{R}\,(\mathrm{A}^*) \quad , \quad \mathfrak{R}\,(\mathrm{BB}^*\,\mathrm{A}^*) \subset \mathfrak{R}\,(\mathrm{B}),$$

d'où il résulte

$$\mathfrak{R}\,(\mathrm{BB}^*\,\mathrm{A}^*) \subset \mathfrak{R}\,(\mathrm{A}^*) \cap \mathfrak{R}\,(\mathrm{B})\,.$$

Mais, d'après les lemmes 1 et 2,

$$\text{dimens } \mathfrak{R}\,(\mathrm{BB}^*\,\mathrm{A}^*) = \text{rang AB}$$

$$\text{dimens } [\mathfrak{R}\,(\mathrm{A}^*) \cap \mathfrak{R}\,(\mathrm{B})] \leq \text{rang AB}\,,$$

et on déduit

$$\boxed{\mathfrak{R}\,(\mathrm{BB}^*\,\mathrm{A}^*) = \mathfrak{R}\,(\mathrm{A}^*) \cap \mathfrak{R}\,(\mathrm{B})}$$

et, d'une manière analogue,

$$\boxed{\mathfrak{R}\,(\mathrm{A}^*\,\mathrm{AB}) = \mathfrak{R}\,(\mathrm{A}^*) \cap \mathfrak{R}\,(\mathrm{B})}$$

et nous avons

$$\mathfrak{R}\,(\mathrm{BB}^*\,\mathrm{A}^*) = \mathfrak{R}\,(\mathrm{A}^*\,\mathrm{AB}). \tag{19}$$

Donc, si (2) est vérifiée, on déduit les formules (15) et (17), ensuite les formules (18) et finalement (19). Réciproquement, de (19) on déduit

$$\mathrm{BB}^*\,[\mathfrak{R}\,(\mathrm{A}^*)] \subset \mathfrak{R}\,(\mathrm{A}^*) \quad ; \quad \mathrm{A}^*\,\mathrm{A}\,[\mathfrak{R}\,(\mathrm{B})] \subset \mathfrak{R}\,(\mathrm{B}),$$

donc les formules (15) et (17), et il en résulte (2).

THÉORÈME 1. – *Etant données les matrices* A *et* B *pour lesquelles on peut effectuer le produit* AB, *la relation* $(\mathrm{AB})^{(-1)} = \mathrm{B}^{(-1)}\,\mathrm{A}^{(-1)}$ *est valable si et seulement si la relation*

$$\boxed{\mathfrak{R}\,(\mathrm{BB}^*\,\mathrm{A}^*) = \mathfrak{R}\,(\mathrm{A}^*\,\mathrm{AB})} \tag{20}$$

est vérifiée

THÉORÈME 2. – *Dans les mêmes hypothèses que précédemment on a* $(\mathrm{AB})^{(-1)} = \mathrm{B}^{(-1)}\,\mathrm{A}^{(-1)}$ *si et seulement si*

$$\boxed{\text{rang}\,(\mathrm{BB}^*\,\mathrm{A}\,,\,\mathrm{A}^*\,\mathrm{AB}) = \text{rang BB}^*\,\mathrm{A}^*}\,, \tag{21}$$

la matrice du premier membre étant composée de deux cellules BB*A* et A*AB.

En effet, si (2) est vérifiée, on a la relation (20); et, comme $\mathfrak{R}\,(\mathrm{A}^*\,\mathrm{AB})$ est déterminé par les colonnes de A*AB, on déduit que ces colonnes sont des combinaisons lineaires des colonnes de BB*A*. Dans (21), on ajoute aux colonnes de $BB^* A^*$ les colonnes de $A^* AB$, qui en sont des combinaison linéaires, et le rang de la matrice reste donc inchangé.

Réciproquement, si (21) est vérifiée, il en résulte que les colonnes de $A^* AB$ sont des combinaisons linéaires des colonnes de $BB^* A$; par conséquant:

$$\mathfrak{R}(A^* AB) \subset \mathfrak{R}(BB^* A^*)$$

et, en tenant compte du lemme 1, on déduit $\mathfrak{R}(A^* AB) = \mathfrak{R}(BB^* A^*)$. La relation (21) présente l'avantage de ne pas exiger le calcul préalable d'aucune i.g.

Évidemment, la relation (21) peut être remplacée par la relation équivalente

$$\text{rang}\,(BB^* A^*, A^* AB) = \text{rang}\, A^* AB. \tag{22}$$

On vérifie comme il suit les quatre cas particulier du nr. 1 pour lesquels la formule (2) est vraie.

1° Si B est unitaire, $BB^* = E$; les colonnes de A^*AB sont alors des combinaisons linéaires des colonnes de A^* et (21) est vérifiée.

2° $B = A^*$; alors $BB^* A^* = A^* AB$.

3° $B = A^{(-1)}$; alors $A^* AB = A^* AA^{(-1)} = A^*$ et $BB^* A^* = A^{(-1)} A^{*(-1)} A^* = A^{(-1)}$ [8; p. 518]; mais $\mathfrak{R}[A^{(-1)}] = \mathfrak{R}(A^*)$, [10; p. 681], [12; p. 445]; done les colonnes de $A^{(-1)}$ sont des combinaisons linéaires des colonnes de A^* et (21) est vérifiée.

4° Pour $A(p \times r)$, $B(r \times n)$, les matrices $BB^* A^*$ et $A^* AB$ sont des matrices $(r \times p)$ et $(r \times n)$, les deux de rang maximal r.

BIBLIOGRAFIE.

[1] E. H. MOORE, *General Analysis, Part* I, «Mem. Amer. Phil. Soc.», *1*, 197–209 (1935).

[2] A. BJERHAMMAR, *Rectangular reciprocal matrices*, « Bull. Géodésique », 188–220 (1951).

[3] R. PENROSE, *A generalised inverse for matrices*, « Proc. Cambridge Phil. Soc. », *51*, 406–413 (1955).

[4] R. RADO, *Note on generalized inverse of matrices*, Ibid., *52*, 600–601 (1956).

[5] T.N.E. GREVILLE, *The pseudo inverse of a rectangular singular matrix*, « SIAM, Review », *1*, nr. 1,38–43 (1959).

[6] T.N.E. GREVILLE, *Some applications of the pseudoinverse of a matrix*, « SIAM, Review », *2*, nr. 1, 16 (1960).

[7] E. ARGHIRIADE et A. DRAGOMIR, *Une nouvelle définition de l'inverse généralisée d'une matrice*, « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, vol. XXXV, fasc. 3–4, 158–165 (1963).

[8] T.N.E. GREVILLE, *Note on the generalized inverse of a matrix product*, « SIAM, Review », *8*, nr. 4, 518–521 (1966).

[9] E. ARGHIRIADE, *Sur les matrices qui sont permutables avec leurs inverse généralisée*. « Rend. Acc. Lincei », ser. VIII, vol. XXXV, fasc. 5, 244–251 (1963).

[10] BEN ISRAEL et A. CHARNES, *Generalized Inverses and the Bott–Duffin Network Analysis*, « Journal of Math. Analysis and Appl. », *7*, nr. 3, 428–435 (1963).

[11] D. DOKOVIČ, *On the generalized inverse for matrices*, « Glasnik. Periodicum », ser. II, *20*, nr. 1–2, 51–55, Zagreb–Yougoslavie (1965).

[12] C. A. DESOER et B. H. WHALEN, *A note pseudoinverses*, « J. Soc. Indust. Appl. Math. », *2*, nr. 2, 442–447 (1963).

[13] BEN ISRAEL et A. CHARMES, *Contributions to the theory of generalized Inverses*, « J. Soc. Indust. Appl. Math. », *2*, nr. 3, 662–699 (1963).