Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Ida Cattaneo Gasparini

Su una condizione necessaria per l'esistenza globale di un campo di r-piani su una varietà differenziabile

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **42** (1967), n.5, p. 634–639.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_42_5_634_0>

Geometria differenziale. — *Su una condizione necessaria per l'esistenza globale di un campo di r–piani su una varietà differenziabile* (*). Nota di IDA CATTANEO GASPARINI, presentata (**) dal Socio E. BOMPIANI.

SUMMARY. — It is proved that if a Riemannian compact orientable manifold V_n ($n = 2m$) admits a continuous global field of *r–planes* (r odd) ($1 \leq r < n$), the Eulero–Poincaré characteristic must be null. The result is obtained by means of A. Weil's theorem employing a connection, studied by the author in previous papers, adapted to the r–planes distribution.

Il problema di trovare condizioni affinché una varietà differenziabile compatta, ammetta uno o più campi di vettori ovunque continui e non nulli ovvero un campo di r–piani porta alla considerazione delle classi caratteristiche del fibrato tangente a V_n. Questo genere di problemi può essere condotto per diverse strade: alcune seguono metodi di pura topologia algebrica (spazio classificante di un gruppo G, quadrati di Steenrod, successioni di Gysin etc.) (1), altre utilizzano anche strumenti di geometria differenziale. È quest'ultima la via seguita nel presente lavoro. In esso ci si basa su un teorema di A. Weil riguardante l'omomorfismo caratteristico di un fibrato principale e su alcuni risultati ottenuti in mie Note precedenti [2] [3] [4] relativi alle connessioni adattate a una struttura quasi prodotto. Si ottengono per questa via classi caratteristiche che appartengono ad una sottoalgebra dell'algebra di coomologia a coefficienti reali della varietà V_n e che si esprimono mediante polinomi esterni di elementi della forma di curvatura adattata. Si arriva così al risultato seguente: «Condizione necessaria affinché una varietà V_n di dimensione pari, riemanniana, compatta, orientabile ammetta una distribuzione di r–piani orientabili con r dispari è che la caratteristica di Eulero–Poincaré di V_n sia nulla».

Il teorema, benché esprima soltanto una condizione necessaria, contribuisce a mettere in evidenza il significato dell'annullarsi dell'invariante topologico costituito dalla caratteristica di Eulero–Poincaré. Esso mostra altresì come la considerazione della connessione «adattata» possa essere uno strumento utile per la valutazione di invarianti topologici.

1. G–STRUTTURE ASSOCIATE A UN CAMPO DI r–PIANI. – Sia V_n una varietà differenziabile reale C^∞, compatta, orientabile e dotata di una struttura riemanniana. Supponiamo definito su V_n un campo continuo di piani

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del gruppo di ricerca matematica N. 1 del C.N.R.

(**) Nella seduta del 13 maggio 1967.

(1) Per una chiara esposizione secondo questi punti di vista si veda ad esempio il corso C.I.M.E. settembre 1966, L'Aquila [7].

tangenti orientabili a r dimensioni, o, come diremo brevemente, un campo continuo di r–piani. È chiaro che se $r = 0$ o $r = n$ tale campo esiste sempre. Se $r \neq 0$, $r \neq n$, l'esistenza di tale campo implica per V_n una decomposizione del fibrato tangente nella somma di due sottospazi e quindi la possibilità di una riduzione del gruppo strutturale.

Sia $E(V_n)$ il fibrato principale dei riferimenti lineari. Ricordiamo che si chiama G–struttura su V_n un sottofibrato di $E(V_n)$ avente come gruppo strutturale un sottogruppo G di $GL(n, R)$. Si considereranno nel seguito G'–strutture con $G' = SO(r) \times SO(n-r)$ $(1 \leq r < n)$. $SO(q)$ indica la componente connessa dell'identità del gruppo ortogonale agente su uno spazio lineare a q dimensioni.

2. RICHIAMO SUL TEOREMA DI A. WEIL. – Sia $P(V_n, G)$ un fibrato principale su V_n con G gruppo di Lie *compatto e connesso*.

Indichiamo con $S(G)$ l'algebra delle forme multilineari simmetriche su g, algebra di Lie di G,

$$(1) \qquad F(\cdots X_i \cdots X_j \cdots) = F(\cdots X_j \cdots X_i \cdots) \qquad X_i, X_j \cdots \in g.$$

L'operazione di prodotto definita in $S(G)$ è quella che fa corrispondere ad una forma F di grado k e ad una forma Ψ di grado r una forma di grado $r + k$ così definita

$$(2) \qquad (F \cdot \Psi)(X_1 \cdots X_{k+r}) = \frac{1}{(r+k)!} \Sigma F(X_{i_1} \cdots X_{i_k}) \Psi(X_{i_{k+1}} \cdots X_{i_{k+r}}).$$

La sommatoria è estesa a tutte le permutazioni dei vettori X_i onde simmetrizzare il prodotto.

Si consideri ora la sottoalgebra $I_S(G)$ degli elementi di $S(G)$ invarianti per G; essa si identifica con l'algebra delle forme multilineari simmetriche su g invarianti per l'azione del gruppo aggiunto

$$(3) \qquad F(ad(a) X_1 \cdots ad(a) X_k) = F(X_1 \cdots X_k) \qquad \forall a \in G.$$

Indicata con $A(G)$ l'algebra esterna di g^* (duale di g), ossia l'algebra delle forme di ogni grado invarianti a sinistra, le forme di $I_S(G)$ rappresentano i cocicli dell'algebra di Weil $W(G) = A(G) \otimes S(G)$ rispetto al differenziale che estende a $W(G)$ il differenziale esterno d definito in $A(G)$ [1] [8].

Sia ω una connessione definita su V_n e sia Ω la sua forma di curvatura. Ω è una 2–forma definita su V_n a valori in g. Sostituendo in $F(X_1 \cdots X_k)$ a X_i la forma Ω, la funzione composta che ne risulta $F(\Omega \cdots \Omega)$ è una forma differenziale su V_n di grado $2k$ che si dimostra essere chiusa in virtù dell'identità di Bianchi. Secondo la teoria di De Rham essa definisce allora un elemento dell'algebra di coomologia $H^*(V_n, R)$ di V_n a coefficienti reali. La connessione ω definisce quindi un omomorfismo h di $I_S(G)$ in $H^*(V_n, R)$

$$(4) \qquad h: \quad I_S^k(G) \to \Psi_k \in H^{2k}(V_n, R).$$

Il teorema di A. Weil [1] [6] afferma che questo omomorfismo stabilito mediante l'ausilio della connessione è *indipendente dalla scelta della connessione*, È dunque un invariante della *struttura fibrata* P. L'immagine di $I_S(G)$ mediante questo omomorfismo è una sottoalgebra dell'algebra di coomologia $H^*(V_n, R)$ dello spazio di base detta sottoalgebra caratteristica della struttura fibrata. I suoi elementi sono detti *classi caratteristiche*.

Se G è il gruppo SO (n) le classi così determinate sono le classi di Pontrjagin il quale ha dato per primo [12] [6] un insieme di forme differenziali che costituisce un insieme completo di generatori. Se $n = 2m$ tali forme sono

$$\Psi_s = \Omega_{i_1 i_2} \wedge \Omega_{i_2 i_3} \wedge \cdots \wedge \Omega_{i_s i_1} \qquad (s = 1, 2, \cdots, m-1) \tag{5}$$

$$\Psi_n = \varepsilon_{i_1 \cdots i_n} \Omega_{i_1 i_2} \wedge \cdots \Omega_{i_{n-1} i_n} . \tag{6}$$

Come d'abitudine indici ripetuti sottintendono sommazione; $\varepsilon_{i_1 \cdots i_n}$ è il simbolo di Kronecker: uguale a $+1$ o -1 a seconda che $i_1 \cdots i_n$ formi una permutazione pari o dispari di $1, 2, \cdots, n$, altrimenti zero.

3. Caso delle G′ strutture. – Per determinare l'omomorfismo h che, come si è visto, dà luogo alle classi caratteristiche cercate, ci serviremo di una connessione adattata che, essendo intrinsecamente legata alla struttura del fibrato tangente a V_n, semplificherà la valutazione degli invarianti topologici della struttura stessa.

Applicando i risultati ottenuti nella mia Nota precedente [2] al caso in cui la connessione adattata sia riemanniana, si trovano per la forma di connessione ω le condizioni seguenti

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{11} = \omega_{22} = \cdots = \omega_{nn} = 0 \\ \omega_{\alpha s} = \omega_{t\beta} = 0 \\ \omega_{\alpha\beta} + \omega_{\beta\alpha} = 0 \\ \omega_{ts} + \omega_{st} = 0 \end{array} \right. \tag{7}$$

(Limitatamente alla forma di connessione adattata ω e alla corrispondente forma di curvatura Ω valgono le convenzioni seguenti: α, β e ogni indice greco varia da 1 a r; t, s e ogni indice latino minuscolo varia da $r+1$ a n; R, S e ogni indice latino maiuscolo varia da 1 a n).

Come è noto [9], la forma di curvatura Ω relativa alla connessione ω è data da una matrice $n \times n$ i cui elementi Ω_{RS} sono le 2-forme differenziali così definite

$$\Omega_{RS} = d\omega_{RS} + \omega_{RM} \wedge \omega_{MS} . \tag{8}$$

In virtù delle relazioni (7), le Ω_{RS} soddisfano alle condizioni seguenti

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{11} = \Omega_{22} = \cdots = \Omega_{nn} = 0 \\ \Omega_{\alpha s} = \Omega_{t\beta} = 0 \\ \Omega_{\alpha\beta} + \Omega_{\beta\alpha} = 0 \\ \Omega_{ts} + \Omega_{st} = 0 . \end{array} \right. \tag{9}$$

OSSERVAZIONE 1.

Notiamo che $\Psi_s = 0$ se s è dispari, a causa della antisimmetria della matrice Ω. Si hanno quindi forme non nulle solamente per i gradi che sono multipli di 4. Indichiamo allora con p^{4k} la classe caratteristica determinata da Ψ_{2k} e con $p\,(G')$ la classe caratteristica totale.

Osserviamo che sia p sia le p^{4k} dipendono da $G'\,(r\,,n)$ $(1 \leq r < n)$.

OSSERVAZIONE 2.

Sempre tenendo conto della definizione di classi caratteristiche p^{4k} mediante l'omomorfismo h individuato da una connessione diamo una dimostrazione diretta delle seguenti proprietà alle quali esse soddisfano:

Proprietà 1: Proprietà di « naturalità ».

Se $f\,(f_P\,, f_{V_n})$ è un isomorfismo tra due fibrati principali su V_n P e P′ e $p\,(P)$ e $p'\,(P')$ sono le classi totali relative ai due fibrati P′ e P, si ha

$$f^*_{V_n}\, p'\,(P') = p\,(P)\,.$$

Per dimostrarlo cominciamo col ricordare che un isomorfismo f tra fibrati è definito da una coppia di applicazioni $(f_P\,, f_{V_n})$ tali che

a) il seguente diagramma sia commutativo:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "f_P"] \arrow[d, "\pi"'] & P' \arrow[d, "\pi'"] \\ V_n \arrow[r, "f_{V_n}"'] & V'_n \end{tikzcd}$$

π e π' essendo le proiezioni canoniche in P e in P′;

b) $\forall x \in V_n$

$$f_{P/(\pi^{-1}(x))} \sim \pi'^{\,-1}(x') \qquad\qquad x' = fx\,.$$

In base alla definizione, f induce un isomorfismo tra le fibre sui punti corrispondenti e lascia allora invariati i campi di vettori verticali; f lascia invariati anche i campi di vettori basici Y cioè

$$f\,Y_z = Y_{fz} \qquad\qquad \forall z \in P\,.$$

Infatti se $w \in R^n$ e Y è il campo di vettori associato a w, cioè

$$\vartheta\,(Y_z) = w$$

(ϑ essendo la 1–forma su P a valori in R^n definita da: $\vartheta\,(Y_z) = z^{-1}\,\pi Y_z$ e z l'isomorfismo tra R^n e lo spazio tangente T nel punto $\pi z \in V_n : R^n \to T_{\pi z}$) si ha

$$\pi' f Y_z = f \pi Y_z\;;$$

ma, essendo

$$\pi Y_z = z \cdot w ,$$

ne segue

$$\pi' f Y_z = fz \cdot w$$

ossia

$$f Y_z = Y_{fz} .$$

Campi di vettori verticali e campi di vettori basici restano invariati per f; passando allora dai vettori alle forme si può dire che la forma di connessione e per conseguenza la forma di curvatura Ω è invariante per f. Si conclude che

$$f^* p' (P') = p (P) .$$

Questa proprietà esprime che la classe p è un funtore controvariante per le applicazioni isomorfe tra fibrati.

In particolare se $f_{V_n} = id$ si ha

$$f^* = id \quad \text{e}$$

$$p (P') = p (P) .$$

Proprietà 2: Proprietà di dualità di Whitney.

Se la fibra ξ di un fibrato si decompone nella somma diretta di ζ e η, il teorema di dualità di Whitney esprime le relazioni tra le classi caratteristiche dei tre fibrati: (ξV_n), (ζV_n) e (ηV_n). Indicata con w la classe totale di Whitney

$$w (\xi) = 1 + w_1 (\xi) \cdots + w_n (\xi)$$

$$(w (\xi) \in H^* (V_n Z_2) \quad w_i (\xi) \in H^i (V_n , Z_2))$$

il teorema di Whitney afferma che

$$w (\zeta \oplus \eta) = w (\zeta) \cup w (\eta)$$

$$w_k (\zeta \oplus \eta) = \sum_{i+j=k} w_i (\zeta) \cup w_j (\eta) .$$

La dimostrazione di questa proprietà è immediata per le classi di Pontrjagin definite mediante le (5) (6), pur di utilizzare una forma di curvatura adattata.

Se la fibra si decompone infatti nella somma diretta di ζ e η la matrice della forma di curvatura adattata si decompone in due blocchi e le classi caratteristiche $p^{4k} (\xi)$, in base alla definizione stessa si riducono al prodotto esterno delle classi caratteristiche di ζ e η. (Il prodotto esterno sostituisce naturalmente il prodotto «cup» $\cup$ che compare nel teorema di Whitney).

Come si è osservato a suo tempo, l'esistenza di un campo di r-piani su una V_n riemanniana porta all'esistenza su V_n di una G' struttura.

Diamo allora il seguente

TEOREMA: *Sia* V_n $(n = 2m)$ *una varietà riemanniana reale, compatta e orientabile. Se essa ammette una distribuzione di r–piani orientabile con r dispari, la sua caratteristica di Eulero–Poincaré è nulla.*

Si dimostra infatti [6] che il valore della classe definita dalla forma Ψ_n sul ciclo fondamentale γ_n di V_n : $\int\limits_{\gamma_n} \Psi_n$ coincide con il valore della classe di Whitney w_n su γ_n. Per una varietà riemanniana $w_n \gamma_n = \chi$. (χ essendo la caratteristica di Eulero–Poincaré di V_n).

Introducendo su V_n una connessione adattata alla distribuzione di r–piani, ossia alla G′–struttura, si può vedere facilmente che $\Psi_n = 0$ se r è dispari. Infatti ogni termine della (6) è nullo o perché vi compare un indice ripetuto o perché vi compare un termine con indici misti del tipo $\Omega_{\alpha t}$. Segue allora che $\chi = 0$. Se $r = 1$ la condizione è notoriamente anche sufficiente [13] (teorema di Hopf).

COROLLARIO: *Se una varietà riemanniana* V_n *orientabile, compatta ammette una distribuzione continua di r–piani orientabili con r dispari, essa ammette anche un campo continuo di vettori ovunque diverso da zero.*

BIBLIOGRAFIA.

[1] CARTAN H., *Notions d'algèbre differentielle; applications aux groupes de Lie et aux variétés où opère un groupe de Lie*. Colloque de Topologie, CBRM, Bruxelles (1950).

[2] CATTANEO GASPARINI I., *Connessioni adattate a una struttura quasi prodotto*, « Ann. Mat. pura e appl. », *63*, 133–150 (1963).

[3] CATTANEO GASPARINI I., *Sulle* G–*strutture di una* V_n *definite da una 1–forma vettoriale* Φ « Ann. Mat. pura e appl. », *65*, 81–96 (1964).

[4] CATTANEO GASPARINI I., *Struttura metrica adattata a una struttura quasi prodotto*, « Acc. Naz. Lincei », *36*, (1964).

[5] CHERN S. S., *The Gauss–Bonnet formula*, « Annals of Math. », *45*, 747–752 (1944).

[6] CHERN S. S., *Differential Geometry of fiber bundles*, in *Proceedings of the international Congress of Mathematicians*, vol. III, 397–411 (1950).

[7] ECKMANN B., VEN VANDE e THOMAS E., *Classi caratteristiche e questioni connesse*, Corso C.I.M.E. L'Aquila, settembre 1966.

[8] KOSZUL J. L., *Homologie et cohomologie des algebres de Lie*, « Bull. Soc. Math. France », *78*, 65–127 (1950).

[9] LICHNEROWICZ A., *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Ed. Cremonese, Roma (1955).

[10] LICHNEROWICZ A., *Géométrie des groupes de transformations*, Dunod, Paris (1958).

[11] MILNOR J., *Lectures on characteristic classes, mimeographed notes Univ. of Princeton* Princeton, N. J. (1958).

[12] PONTRJAGIN L., *On some topological invariants of Riemannian manifolds*, « C. R. Doklady Acad. Sci. URSS », *43*, 91–94 (1944).

[13] STEENROD N., *Topology of fiber bundles*, Princeton (1951).