Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Enrico Bompiani

Un teorema di Moutard sulle polari di una superficie algebrica

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **43** (1967), n.1-2, p. 9–12.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_1-2_9_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI
http://www.bdim.eu/

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1967.

Geometria. — *Un teorema di Moutard sulle polari di una superficie algebrica.* Nota [*] del Socio ENRICO BOMPIANI.

SUMMARY. — New proof and refinement of a theorem by Moutard on the tac invariant of an algebraic surface and the polar of one of its points.

1. – Th. Moutard ha dato [1] il seguente Teorema:

Le superfici polari di un punto di una superficie algebrica rispetto ad essa hanno nel punto la stessa indicatrice, le sezioni piane per questo punto della superficie e delle sue polari hanno raggi di curvatura inversamente proporzionali agli ordini della superficie diminuiti di uno.

Si sente in questo enunciato una certa dissonanza in quanto la costruzione delle polari di una superficie algebrica ha carattere proiettivo, mentre la nozione di curvatura è metrica. Però il teorema ha effettivamente carattere proiettivo perché il rapporto delle curvature in un punto semplice di due curve in esso tangenti è un invariante proiettivo.

Questo fatto (insieme a molti altri analoghi) era già noto a Mehmke e a Wolffing [2]. Ma la genesi proiettiva di questo invariante (e non la semplice constatazione analitica dell'invarianza di quel rapporto) è dovuta a C. Segre.

Questi [3] considera, nel piano delle due curve, una retta variabile che tenda a passare per il loro punto di contatto (ma *non* alla tangente comune) e valuta il birapporto delle intersezioni della retta secante con le due curve e con la tangente e di un quarto punto preso ad arbitrio sulla secante ma che non tenda al punto di contatto: il limite di questo birapporto quando la retta tende a passare per il punto di contatto non dipende né dalla serie di secanti né dalle posizioni su di esse del quarto punto arbitrario ed è un invariante proiettivo di contatto delle due curve.

La dimostrazione del Dewulf, precedente di oltre trent'anni le pubblicazioni citate, non riconosce l'invarianza proiettiva del rapporto delle curva-

(*) Pervenuta all'Accademia il 1° luglio 1967.

(1) Come *Question 522*, «Nouvelles Annales de Mathématiques», vol. XIX, 1860, p. 195, una dimostrazione è stata data nello stesso volume, p. 431 dal Dewulf.

(2) R. MEHMKE, *Einge Sätze über die räumbiche Collineation und Affinität, welche sich auf die Krümmung von Curven und Flächen beziehen*, «Zeitschr. für Math. u. Phys.», vol. 36, 1891, pp. 56–60; E. WÖLFFING, *Das Verhältniss der Krümmungsradien im Berührungspunkte zweier Curven*, «ibidem», vol. 38, 1893, pp. 237–249.

(3) C. SEGRE, *Su alcuni punti singolari delle curve algebriche e sulla linea parabolica di una superficie*. «Rend. Acc. Lincei», s.v. vol. VI, 1897, pp. 168–175; e *Opere*. Edizioni Cremonese, Roma 1958, vol. II, pp. 1–8, in fine al n. 1.

Per una più estesa applicazione del procedimento di C. Segre anche a casi esclusi da precedenti Autori vedasi la mia Nota: *Invarianti proiettivi di contatto fra curve piane*, «Rend. Acc. Lincei», ser. VI. vol. III, 1926, pp. 118–123.

ture delle sezioni piane; attenendosi all'aspetto metrico, dimostra prima il teorema di Moutard per le curvature delle sezioni normali e da queste poi, col teorema di Meusnier, passa a tutte le sezioni piane.

Del contatto di due superfici in un punto mi sono occupato da tempo (4). In particolare se le superfici hanno nel punto di contatto le stesse tangenti asintotiche (come appunto accade per una superficie algebrica e le polari di un suo punto) le due superfici hanno un solo invariante. In questa Nota mi servo del procedimento di C. Segre per dimostrare il teorema di Moutard, cioè considero una rigata di cui una generatrice passi per il punto di contatto (ma non sia ivi tangente alle due superfici) e su di essa una curva unisecante (che non passi per il punto di contatto). Si ritrova subito (senza passare alle sezioni piane) l'invariante di Moutard. Ma si può di più indagare se si può scegliere la rigata delle secanti in modo che l'invariante abbia per essa (in relazione al punto di contatto) valore stazionario.

E allora si trova una corrispondenza fra le tangenti nel punto di contatto e i piani (per esso) di un cono di terza classe (che è dunque individuato per ogni punto semplice di una superficie algebrica).

Si determina anche come vada alterato l'invariante di Moutard nel caso che la rigata delle secanti abbia per tangente una tangente asintotica nel punto in esame.

2. – In un sistema di coordinate proiettive omogenee (x, y, z, t) si consideri una superficie algebrica d'ordine n, F^n, passante per O $(0, 0, 0, 1)$, e avente ivi per piano tangente $z = 0$, sia

$$zt^{n-1} = \{\varphi_2(x, y) + \varphi_1(x, y) z + \varphi_0 z^2\} t^{n-2} + \\ + \{\psi_3(x, y) + \psi_2(x, y) z + \psi_1(x, y) z^2 + \psi_0 z^3\} t^{n-3} + \cdots \tag{2.1}$$

con le φ, ψ, *forme* in x, y di grado uguale all'indice, la sua equazione.

Quando occorrerà specificheremo:

$$\varphi_2(x, y) = a_{11} x^2 + 2 a_{12} xy + a_{22} y^2 \\ \varphi_1(x, y) = a_1 x + a_2 y. \tag{2.2}$$

La superficie polare della 2.1 rispetto ad O è

$$zt^{n-2} = \frac{n-2}{n-1} \{\varphi_2(x, y) + \varphi_1(x, y) z + \varphi_0 z^2\} t^{n-3} + \\ + \frac{n-3}{n-1} \{\psi_3(x, y) + \psi_2(x, y) z + \psi_1(x, y) z^2 + \psi_0 z^3\} t^{n-4} + \cdots \tag{2.3}$$

(4) E. BOMPIANI, *Sul contatto di due superficie*, « Rend. Acc. Lincei », ser. VI, 1932, pp. 116–121; *Invarianti proiettivi di una particolare coppia di elementi superficiali del 2° ordine*, « Boll. U.M.I. », a XIV, 1935, pp. 237–244; *Invarianti Proiettivi di calotte*, « Rend. Acc. d'Italia », ser. VII, 1941, pp. 888–895. Nelle Note ora citate si trovano molte altre indicazioni bibliografiche.

Si consideri ora la rigata descritta dalla retta

$$x = l(\varepsilon)\, z + \varepsilon \qquad (2.4)$$
$$y = m(\varepsilon)\, z + \eta(\varepsilon)$$

al variare di ε in un intervallo in cui cada $\varepsilon = 0$ per

$$l(\varepsilon) = l_0 + l_1\, \varepsilon + \cdots,\; m(\varepsilon) = m_0 + m_1\, \varepsilon + \cdots,\; \eta = k\varepsilon + \cdots$$

ove i puntini indicano termini di grado > 1 in ε. Per $\varepsilon \to 0$ e limitandosi ai termini in ε di grado ≤ 3, per l'intersezione $(0, 0, z_0, 1)$ della (2.4) con la superficie data 2.1 si ha

$$z_0 = \varphi_2(1, k)\, \varepsilon^2 + [2\{(a_{11} l_0 + a_{12} m_0) + (a_{12} l_0 + a_{22} m_0)\, k\} + \varphi_1(1, k)]\, \varphi_2(1, k)\, \varepsilon^3 + \psi_3(1, k)\, \varepsilon^3 + \cdots \qquad (2.5)$$

mentre per l'analoga intersezione $(0, 0, z_1, 1)$ con la polare 2.3 si ha

$$z_1 = \frac{n-2}{n-1}\, \varphi_2(1, k)\, \varepsilon^2 + \left(\frac{n-2}{n-1}\right)^2 [2\{(a_{11}\, l_0 + a_{12}\, m_0) + (a_{12}\, l_0 + a_{22}\, m_0)\, k\} + \varphi_1(1, k)]\, \varphi_2(1, k)\, \varepsilon^3 + \frac{n-3}{n-1}\, \psi_3(1, k)\, \varepsilon^3 + \cdots \qquad (2.6)$$

Si prenda ora il birapporto dei punti d'intersezione della retta (2.4) con la polare, con la superficie data e col piano tangente e di un quarto punto sulla retta definito da $z(\varepsilon)$ con la condizione: $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} z(\varepsilon) \neq 0$.

Questo birapporto vale

$$\frac{z_1}{z_0}\, \frac{1 - \dfrac{z_0}{z}}{1 - \dfrac{z_1}{z}}\,; \qquad (2.7)$$

il secondo rapporto differisce da 1 per termini (almeno) del 2° ordine in ε sicché se $\varphi_2(1, k) \neq 0$, cioè se la rigata *non* è tangente in O ad una tangente asintotica di F^n

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{z_1}{z_0} = \frac{n-2}{n-1} \qquad (2.8)$$

e questo è l'invariante proiettivo del teorema di Moutard.

3. – Sempre nell'ipotesi $\varphi_2(1, k) \neq 0$ valutiamo i termini del 1° ordine in ε del rapporto z_1/z_0. Essi valgono, a parte un fattore numerico non nullo,

$$2\,(a_{11} + a_{12}\, k)\, l_0 + 2\,(a_{12} + a_{22}\, k)\, m_0 + \varphi_1(1, k) + \frac{n-1}{n-2}\, \frac{\psi_3(1, k)}{\varphi_2(1, k)}\,. \qquad (3.1)$$

Se si uguaglia questa espressione a zero si ha una relazione che può scriversi

$$m_0 = p(k)\, l_0 + q(k) \qquad (3.2)$$

ove $p(k)$ è una funzione razionale di 1° grado in k e $q(k)$ è il rapporto di due polinomi di 3° grado in k. Per valori legati dalla (3.2) di l_0, m_0 la retta per O della rigata appartiene al piano

$$y = p(k)\,x + q(k)\,z\,.$$

Si noti che la traccia di questo piano sul piano tangente è la tangente coniugata alla reta $y = kx$, $z = 0$ che è tangente in O alla rigata (precisamente alla sua traccia sul piano tangente).

Si ha quindi il teorema:

Ad ogni tangente (non asintotica) della superficie data in O *è associato un piano ben determinato della stella di centro* O *dotato di questa proprietà: se la traccia sul piano tangente in* O *della rigata descritta dalla secante ha la tangente assegnata e se la retta della rigata per* O *appartiene al piano associato il valore del birapporto sopra considerato è stazionario.*

Al variare della tangente i piani associati inviluppano un cono di terza classe, la tangente e la traccia sul piano tangente del piano ad essa associato sono tangenti coniugate.

4. – Passiamo a considerare il caso $\varphi_2(1, \varkappa) = 0$, cioè che la traccia della rigata delle secanti sul piano tangente in O tocchi una tangente asintotica.

Lo stesso procedimento adoperato dà

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{z_1}{z_0} = \frac{n-3}{n-1}\,.$$

Questo è l'invariante che sostituisce quello di Moutard [5].

(5) Nell'ipotesi attuale il teorema di Moutard dice soltanto che le sezioni piani della superficie e delle polari con piani passanti per una tangente asintotica hanno un flesso; qui si ha di più un invariante (che dipende dalle calotte del 3° ordine).