Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Francesco Succi

Il teorema di de Rham olomorfo nel caso relativo. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **43** (1967), n.5, p. 276–280.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_5_276_0>

NOTE PRESENTATE DA SOCI

Topologia. — *Il teorema di de Rham olomorfo nel caso relativo* (*). Nota II di FRANCESCO SUCCI, presentata (**) dal Corrisp. E. MARTINELLI.

SUMMARY. — The Rham's theorem in the holomorphic case is extended to the pair (X, A), where X is a complex analytic manifold and A an analytic subset subject to a condition of local contractibility. A de Rham theorem (of "absolute type") for the holomorphic forms on A is also given.

III. – IL TEOREMA DI DE RHAM OLOMORFO RELATIVO PER UN SOTTOINSIEME ANALITICO

9. – *Definizioni. Lemma di Poincaré.* – Sia A un *sottoinsieme analitico* (chiuso) della varietà analitica complessa X, $\dim_{\mathbf{C}} X = n$. Supponiamo che esso soddisfi la seguente ipotesi di contraibilità locale:

(C). – Ogni punto non regolare [1] $y \in A$ possiede in X un sistema fondamentale d'intorni aperti $\{V_i\}$ tali che in ciascuno di essi esista una contrazione $\Phi_i : V_i \times I \to V_i$ (I intervallo chiuso $[0, 1]$), di V_i ad y, tale che:

1) Φ_i contrae $A \cap V_i$ su se stesso;

2) $\Phi_i(x, t)$ è di classe C^∞ rispetto a $t \in I$;

3) per ogni $t \in I$, $\Phi_i(x, t)$ e $\frac{\partial \Phi_i}{\partial t}$ sono olomorfe rispetto a $x \in V_i$.

Sia ora U un aperto di X e $\Omega^*(U) = \{\Omega^p(U), d\}$ il complesso delle forme olomorfe su U. Diremo che una forma olomorfa $\alpha^p \in \Omega^p(U)$ è *nulla sul sottoinsieme analitico* A, quando nell'intorno (in X) di ogni punto y di A sia:

$$\alpha^p = \sum_j f_j \cdot \omega_j^p + \sum_j df_j \wedge \omega_j^{p-1}, \tag{9.1}$$

dove $f_j = 0$ sono le equazioni di A nell'intorno di y e ω_j^p, ω_j^{p-1} forme olomorfe di X.

In queste ipotesi, si prova come nel caso reale (cfr. [5]) che:

LEMMA 1. (di Poincaré) – *Una p-forma olomorfa chiusa e nulla su* A *è localmente il differenziale di una* $(p-1)$*-forma olomorfa, nulla su* A.

10. – *Il teorema di de Rham.* Indicato con $\Omega^p(U, A)$ il **C**–modulo delle p–forme olomorfe di $U \subset X$ nulle su A (cioè su $A \cap U$), risulta, com'è immediato verificare, $d\Omega^p(U, A) \subset \Omega^{p+1}(U, A)$, onde $\{\Omega^p(U, A), d\} = \Omega^*(U, A)$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di Ricerca del CNR.

(**) Nella seduta del 21 giugno 1967.

(1) Com'è noto (cfr. [1]) nell'intorno di un punto regolare un sottoinsieme analitico (anche non irriducibile) è una sottovarietà.

è un complesso. Dal Lemma 1 ora stabilito, segue allora che per ogni intorno contraibile V_i considerato nel n. 9, la successione corta di $\mathbf{C}$–moduli

$$(10.1) \qquad 0 \to \mathring{\Omega}^{p-1}(V_i, A) \to \Omega^{p-1}(V_i, A) \to \mathring{\Omega}^{p}(V_i, A) \to 0$$

è *esatta* ($\mathring{\Omega}^{p}(V_i, A) = \mathbf{C}$–modulo delle q–forme chiuse).

Indicato allora con $\tilde{\Omega}^{p}(X, A)$ il fascio dei germi di p–forme olomorfe di X nulle su A e con $\mathring{\tilde{\Omega}}^{p}(X, A)$ il sottofascio dei germi di forme chiuse, dalla (10.1), per passaggio al limite diretto sui V_i, si trae la successione esatta di fasci:

$$(10.2) \qquad 0 \to \mathring{\tilde{\Omega}}^{0}(X, A) \to \tilde{\Omega}^{0}(X, A) \to \tilde{\Omega}^{1}(X, A) \to \cdots \to \tilde{\Omega}^{n}(X, A) \to 0,$$

la quale, essendo $\mathring{\tilde{\Omega}}^{0}(X, A) = \mathbf{C}_{X-A}$ = fascio semplice dei numeri complessi concentrato su X — A, *è una risoluzione del fascio* $\mathbf{C}_{X-A}$.

Nel caso che si abbia la banalità globale, cioè sia:

$$(10.3) \qquad H^{q}(X, \tilde{\Omega}^{p}(X, A)) = 0, \qquad \text{per } p \geq 0, \ q \geq 1,$$

si ha quindi:

TEOREMA 5. – *Nelle ipotesi poste di contraibilità locale* (C) *e di banalità globale* (10.3), *la coomologia di de Rham* $R^*(X, A)$ *delle forme olomorfe su* X *nulle su* A, *è isomorfa alla coomologia a valori complessi di* X *mod* A:

$$(10.4) \qquad R^*(X, A) \approx H^*(X \bmod A; \mathbf{C}).$$

Osservazione. – Nel caso in cui A è una unione $\tilde{Y}$ di sottovarietà in posizione generale di X, dal Teorema 5 si ritrova il risultato del n. 6 (Nota I), essendo soddisfatta ovviamente la condizione (C) e d'altra parte coincidendo per $\tilde{Y}$ la coomologia di Čech con quella singolare. Con l'attuale dimostrazione il risultato del n. 6 si ottiene sotto condizioni assai più deboli, poiché non occorre ora supporre che valga il teorema di de Rham assoluto né quello relativo per numero inferiore di sottovarietà, come richiedeva la dimostrazione per ricorrenza usata nel n. 6.

11. – *Caso delle varietà di Stein.*

PROPOSIZIONE 5. – *I fasci* $\tilde{\Omega}^{p}(X, A)$ *delle forme olomorfe di* X *nulle su* A *sono* $\mathcal{O}$*–coerenti su* X.

Dimostrazione. – Per $p = 0$, $\tilde{\Omega}^{0}(X, A)$ coincide col fascio dei germi delle funzioni olomorfe di X, nulle su A, che è coerente (cfr. [2]). Sia allora $p \geq 1$. La coerenza su X — A è ovvia, essendo ivi $\tilde{\Omega}^{p}(X, A) = \tilde{\Omega}^{p}(X)$. D'altra parte da (9.1) si trae subito che nell'intorno di ogni punto di A il fascio $\tilde{\Omega}^{p}(X, A)$ è di tipo finito. Ne segue che $\tilde{\Omega}^{p}(X, A)$, quale sottofascio di tipo finito del fascio $\mathcal{O}$–coerente $\Omega^{p}(X)$, è $\mathcal{O}$–coerente su X.

Se X è una varietà di Stein, dal teorema B di Cartan segue allora che la condizione (10.3) di banalità globale è sempre soddisfatta e pertanto:

PROPOSIZIONE 6. – *Il teorema di de Rham olomorfo relativo per* (X, A) (cfr. Teorema 5), *quando* X *è una varietà di Stein, vale sotto la sola ipotesi* (C) *di contraibilità locale di* A.

IV. – Una generalizzazione del teorema di de Rham olomorfo assoluto.

12. – *Il fascio differenziale delle forme olomorfe su un sottoinsieme analitico.* Sia A un sottoinsieme analitico (chiuso) della varietà analitica complessa X. Il fascio $\tilde{\Omega}^p(X, A)$ delle forme olomorfe di X nulle su A (cfr. n. 10) è sottofascio di $\tilde{\Omega}^p(X)$ e il fascio quoziente $\tilde{\Omega}^p(X)/\tilde{\Omega}^p(X, A)$ induce su A un fascio che per definizione assumiamo come il *fascio dei germi di p-forme olomorfe di* A, – e indicheremo con $\tilde{\Omega}^p(A)$. Si ha quindi la successione esatta di fasci su X:

$$0 \to \tilde{\Omega}^p(X, A) \to \tilde{\Omega}^p(X) \to \tilde{\Omega}^p(A)^X \to 0 . \tag{12.1}$$

Poiché $d\tilde{\Omega}^p(X, A) \subset \tilde{\Omega}^{p+1}(X, A)$, il differenziale d determina un differenziale $d_A : \tilde{\Omega}^p(A)^X \to \tilde{\Omega}^{p+1}(A)^X$, cosicché $\{\tilde{\Omega}^p(A)^X, d_A\} = \tilde{\Omega}(A)^X$ è un *fascio differenziale* (su X) e si ha la:

PROPOSIZIONE 7. – *Se il sottoinsieme analitico* A *soddisfa la condizione* (C), *il fascio differenziale* $\tilde{\Omega}^*(A)^X$ *è una risoluzione del fascio* $\mathbf{C}_A$ *dei numeri complessi concentrato su* A.

Dimostrazione. – Infatti, soddisfatta la condizione (C) (cfr. n. 9), il fascio differenziale $\tilde{\Omega}^*(X, A) = \{\tilde{\Omega}^p(X, A), d\}$ è una risoluzione del fascio $\mathbf{C}_{X-A}$, come si è stabilito nel n. 10; pertanto, tenuto conto che $\tilde{\Omega}^*(X)$ è una risoluzione del fascio $\mathbf{C}$, si ha il diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & 0 & & 0 & & 0 & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \mathbf{C}_{X-A} & \to & \mathbf{C} & \to & \mathbf{C}_A & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & \tilde{\Omega}^*(X,A) & \to & \tilde{\Omega}^*(X) & \to & \tilde{\Omega}^*(A)^X & \to & 0 \end{array} \tag{12.1}$$

nel quale le righe e le prime due colonne a sinistra sono esatte (ove si pensi ciascuno dei fasci differenziali $\tilde{\Omega}^*$ esplicitato nella corrispondente successione). Si prova allora facilmente che è esatta anche la terza colonna ragionando sul diagramma (12.2) (scritto per esteso). D'altronde tale fatto può anche stabilirsi basandosi sulla considerazione della successione esatta di coomologia dei complessi di $\mathbf{C}$-moduli che per ogni punto $x \in X$ si ottengono dalle successioni verticali di fasci, ricordando note proprietà (cfr. [4]).

Ovviamente tale proposizione equivale al lemma di Poincaré per le p-forme di A, le quali per definizione non sono che le sezioni del fascio $\tilde{\Omega}^p(A)$.

13. – *Il teorema di de Rham.* Passando alle sezioni globali di $\tilde{\Omega}^p(A)^X$, o ciò che è lo stesso, alle sezioni globali (su A) di $\tilde{\Omega}^p(A)$, si ottengono, per definizione, i $\mathbf{C}$-moduli $\Omega^p(A)$ delle *p-forme olomorfe globali di* A, i quali con il differenziale d'_A indotto da d_A, costituiscono il complesso $\Omega^*(A) = \{\Omega^p(A), d'_A\}$ delle forme olomorfe globali su A.

Tenuto conto che si hanno gli isomorfismi $H^q(X, \tilde{\Omega}^p(A)^X) \approx H^q(A, \tilde{\Omega}^p(A))$ e che $C_A|_A$ è il fascio semplice dei numeri complessi su A, quando sia:

$$(13.1) \qquad H^q(A, \tilde{\Omega}^p(A)) = 0 \qquad \text{per} \quad q \geq 1 \text{ e } p \geq 0,$$

dalla Prop. 7 segue il:

TEOREMA 6. – *Se* A *è un sottoinsieme analitico verificante la condizione* (C) *e se sussiste la* (13.1), *la coomologia di de Rham* $R^*(A)$ *delle forme olomorfe su* A *è isomorfa alla coomologia* $H^*(A; \mathbf{C})$ *di A a valori complessi.*

Supponiamo ora che sia:

$$(13.2) \qquad \begin{cases} H^q(X, \tilde{\Omega}^p(X)) = 0 \\ H^q(X, \tilde{\Omega}^p(X, A) = 0. \end{cases} \qquad \text{per} \quad q \geq 1, \ p \geq 0.$$

Dalla successione esatta di coomologia indotta dalla (12.1) si ricava allora che sussistono (13.1) e la successione esatta di **C**–moduli:

$$0 \to \Omega^p(X, A) \to \Omega^p(X) \to \Omega^p(A) \to 0.$$

In questa eventualità quindi, *ogni forma olomorfa globale su* A *è indotta da una forma olomorfa globale su* X (per questo basta invero che sia $H^q(X, \tilde{\Omega}^p(X, A)) = 0$ per $q \geq 1$; $p \geq 0$), sussiste il teorema di de Rham olomorfo (assoluto) per la varietà X, quello relativo per X mod A e quello assoluto per le forme sul sottoinsieme analitico A. Pertanto:

PROPOSIZIONE 7. – *Se* A *è un sottoinsieme analitico verificante la condizione* (C) *e se sussistono le* (13.2), *si hanno gli isomorfismi sotto indicati*:

$$(13.3) \qquad \begin{tikzcd} R^*(X) \arrow[rr, "\approx"] \arrow[dr] & & H^*(X; \mathbf{C}) \arrow[dl] \\ & R^*(A) \arrow[r, "\approx"] \arrow[dl] & H^*(A; \mathbf{C}) \arrow[dr] & \\ R^*(X, A) \arrow[uu] \arrow[rr, "\approx"] & & H^*(X \bmod A; \mathbf{C}) \arrow[uu] \end{tikzcd}$$

dove il triangolo a sinistra è il triangolo esatto della coomologia di de Rham e quello a destra è il triangolo esatto della coomologia a valori in **C**.

14. – *Caso delle varietà di Stein.* – Se X è una varietà di Stein, la (13.1) è sempre verificata perché $\tilde{\Omega}^p(A)$ è un fascio analitico coerente (su A), come discende da (12.1) tenuto conto che $\tilde{\Omega}^p(X)$ e $\tilde{\Omega}^p(X, A)$ sono coerenti (cfr. Prop. 5). D'altra parte se X è una varietà di Stein, sono verificate le (13.2), essendo appunto coerenti i fasci $\tilde{\Omega}^p(X)$ e $\tilde{\Omega}^p(X, A)$, e pertanto in conseguenza si ritrova di nuovo che le (13.1) sono soddisfatte. Si ha quindi:

TEOREMA 7. – *Se* X *è una varietà di Stein e* A *un suo sottoinsieme analitico soddisfacente alla condizione* (C), *ogni forma olomorfa globale su* A *è indotta da una forma olomorfa globale su* X, *per il complesso* $\Omega^*(A)$ *di tali forme globali su* A *vale il teorema di de Rham*:

$$R^*(A) \approx H^*(A; C),$$

ed anzi sussiste il diagramma (13.3).

BIBLIOGRAFIA.

[1] H. CARTAN, *Les espaces analytiques*. (Proc. I.C.M. 1958).
[2] H. CARTAN, *Faisceaux analytiques coherents*. 2° Ciclo C.I.M.E., Varenna (1963).
[3] R. GODEMENT, *Théorie des faisceaux*. Hermann, Paris (1958).
[4] D. G. NORTHCOTT, *Homological algebra*. Cambridge University press, (1960).
[5] F. SUCCI, *Il teorema di de Rham e la dualità per le varietà relative*, « Rend. Acc. Lincei », s. VIII, vol. XXXV, Roma (1963).
[6] F. SUCCI, *Alcune osservazioni sui teoremi di de Rham*, « Riv. Mat. Univ. », Parma (1966).