Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Silvio Cinquini

Sopra l'iperbolicità dei sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **43** (1967), n.5, p. 288–292.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_5_288_0>

Analisi matematica. — *Sopra l'iperbolicità dei sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti.* Nota I di SILVIO CINQUINI, presentata [*] dal Socio G. SANSONE.

RÉSUMÉ. — Il s'agit du problème de la réduction à la forme caractéristique d'un système d'équations aux dérivées partielles quasi linéaires du premier ordre dans le cas, où les fonctions inconnues dependent de plus de deux variables indépendantes: tout de même on fait un examen de la définition d'hyperbolicité de I. G. Petrowski. Dans cette première Note on va considérer le cas où l'équation caractéristique a ces racines réelles et distinctes.

È noto che per i sistemi di equazioni a derivate parziali quasi lineari

$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial z_j(x, y_1, \cdots, y_r)}{\partial x} = \sum_{k=1}^{r} f_{jk}(x, y_1, \cdots, y_r; z_1, \cdots, z_m) \frac{\partial z_j}{\partial y_k} + \\ + g_j(x, y_1, \cdots, y_r; z_1, \cdots, z_m), \qquad (j = 1, \cdots, m)$$

o di tipo più generale

$$\text{(II)} \quad \sum_{j=1}^{m} c_{ij}(x, y_1, \cdots, y_r; z_1, \cdots, z_m) \left[\frac{\partial z_j}{\partial x} + \sum_{k=1}^{r} f_{ik}(x, y_1, \cdots, y_r; z_1, \cdots, z_m) \frac{\partial z_j}{\partial y_k}\right] = \\ = g_i(x, y_1, \cdots, y_r; z_1, \cdots, z_m), \qquad (i = 1, \cdots, m),$$

ove il determinante C delle funzioni c_{ij}, $(i, j = 1, \cdots, m)$ è supposto uguale all'unità, è stato raggiunto un complesso di risultati relativi all'esistenza e alla unicità della soluzione del problema di Cauchy [1].

D'altra parte è pure noto [2] che nel caso particolare, in cui le variabili indipendenti sono soltanto due, ogni sistema

$$\text{(1)} \qquad \sum_{j=1}^{m} \left[a_{ij}(x, y, z_1(x, y), \cdots, z_m(x, y)) \frac{\partial z_j}{\partial x} + b_{ij}(\cdots) \frac{\partial z_j}{\partial y}\right] = g_i(\cdots), \\ (i = 1, \cdots, m),$$

(*) Nella seduta del 14 novembre 1967.

(1) M. CINQUINI CIBRARIO e S. CINQUINI, *Equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico,* Monografie matematiche del C.N.R. n. 12, Edizioni Cremonese, Roma, 1964, pp. VIII + 552. Vedi Cap. IV, pp. 301–384, e in particolare bibliografia alla fine del capitolo stesso, p. 384.

M. CINQUINI CIBRARIO, *Teoremi di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti,* «Annali di Matematica pura e applicata», vol. 48 (1959), pp. 103–134; *Teoremi di esistenza per sistemi semilineari di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti,* ibidem vol. 68, pp. 119–160; *Teoremi di esistenza per sistemi di equazioni quasi lineari a derivate parziali in più variabili indipendenti,* ibidem vol. 75, pp. 1–46.

S. CINQUINI, *Un teorema di unicità per sistemi di equazioni a derivate parziali quasi-lineari.* «Annali di Matematica pura e applicata», vol. 75 (1967), pp. 231-260.

(2) Vedi opera cit. in (1) Cap. V, nn. 1–3, pp. 385–393.

ove il determinante delle funzioni $a_{ij}(\cdots)$, $(i, j = 1, \cdots, m)$ è uguale all'unità, può essere ricondotto alla forma caratteristica (II), quando è di tipo iperbolico, vale a dire, se le radici dell'equazione caratteristica sono reali e inoltre o distinte oppure multiple, purché tutti i divisori elementari dell'equazione caratteristica siano semplici.

D'altra parte, nel caso in cui il numero delle variabili indipendenti è maggiore di due, nessun risultato è noto circa la riduzione di un sistema alla già citata forma caratteristica (II) [3], e inoltre tra le diverse definizioni di iperbolicità quella maggiormente nota dovuta a I. G. Petrowski (vedi n. 1, *a*)) dà luogo, innanzi tutto, a un primo interessante rilievo (n. 2).

Pertanto si presenta spontaneo esaminare la possibilità di ridurre alla forma caratteristica (II) un sistema quasi–lineare, le cui funzioni incognite dipendono da $r+1$ (con $r>1$) variabili indipendenti, e che viene considerato senz'altro sotto la forma (6) [4].

I risultati raggiunti nella presente Nota e nelle successive sono validi in condizioni diverse dalla definizione di Petrowski: ciò dipende dalla natura delle cose, perché, come viene messo in evidenza mediante l'esempio del n. 7, esistono sistemi iperbolici secondo Petrowski che non è possibile ridurre alla forma caratteristica (II), né immediatamente, né facendo appello all'idea di effettuare un cambiamento delle funzioni incognite. D'altra parte l'esempio del n. 6 mette in luce l'esistenza di sistemi riducibili alla forma caratteristica (II), i quali non sono iperbolici secondo Petrowski, perché l'equazione caratteristica non ha la forma composta (n. 1, *b*)), ma ammette radici multiple.

In altre parole non solo i risultati dei nn. 3 e 4 sono raggiunti in modo del tutto indipendente dalle considerazioni di Petrowski, ma, al tempo stesso, il contenuto di questa Nota e delle successive costituisce una significativa indagine sulla definizione dell'autore citato.

1. DEFINIZIONE DI PETROWSKI. *a*) Ricordiamo che il sistema

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{r} a_{ijk}(x_0, x_1, \cdots, x_r; z_1, \cdots, z_m)\frac{\partial z_j}{\partial x_k} = f_i(x_0, x_1, \cdots, x_r; z_1, \cdots, z_m), \tag{2}$$
$$(i = 1, \cdots, m)$$

è, secondo Petrowski, di tipo iperbolico rispetto alla variabile x_0 [5], se, qualunque siano le costanti $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ con $\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_r^2 > 0$, posto

$$b_{ij} = a_{ij1}\alpha_1 + \cdots + a_{ijr}\alpha_r, \qquad (i, j = 1, \cdots, m),$$

(3) Nel caso, in cui le variabili indipendenti sono più di due, sarebbe più pertinente la terminologia, forma bicaratteristica, ma per semplicità usiamo il vocabolo caratteristica.

(4) Il contenuto dei nn. 2 e 3 ha formato oggetto di una comunicazione preliminare al Convegno sulle equazioni a derivate parziali (Bologna 22–24 aprile): S. CINQUINI, *A proposito dei sistemi di equazioni a derivate parziali di tipo iperbolico*, vedi i relativi « Atti », pp. 58–62.
Degli ulteriori risultati raggiunti nel complesso di queste Note è data comunicazione all'VIII Congresso dell'U.M.I. (Trieste, ottobre 1967).

(5) Vedi I. G. PETROWSKI, *Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen*, B. G. Teubner, Leipzig, 1955, Cap. II, n. 6, p. 112; o anche op. cit. in (1) Cap. VII, n. 1, pp. 487–488.

l'equazione algebrica di grado m in ρ

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} a_{110}\,\rho + b_{11} & \cdots & a_{1m0}\,\rho + b_{1m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m10}\,\rho + b_{m1} & \cdots & a_{mm0}\,\rho + b_{mm} \end{vmatrix} = 0$$

ha in ciascun punto, nel quale il sistema (2) viene considerato, m radici reali e distinte.

Come è già stato ricordato, la definizione riportata non contiene, come caso particolare, quella relativa al sistema (1), perché in questo caso particolare il sistema può essere di tipo iperbolico anche quando l'equazione caratteristica (che si deduce dalla (3) per $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 0$) ha radici multiple.

b) D'altra parte, per non escludere completamente l'eventualità, che l'equazione caratteristica abbia radici multiple, Petrowski [6] ha considerato il caso particolare, in cui il primo membro dell'equazione (3) ha la forma composta

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_l \end{vmatrix},$$

ove gli elementi, che non appartengono ad alcuna delle matrici quadrate $M_1, \cdots, M_l$ sono tutti nulli. In tal caso, mentre ciascuna equazione, ottenuta uguagliando a zero il determinante di ogni singola matrice componente, deve avere (nel senso indicato in *a*)) radici reali e distinte, non si esclude che due o più di tali equazioni abbiano radici comuni.

2. Osservazione sulla definizione del n. 1. Rileviamo che, siccome è diverso da zero il determinante A delle funzioni a_{ij0}, $(i, j = 1, \cdots, m)$, *per* $1 < m^2 < r$ *non esistono sistemi* (2) *iperbolici secondo Petrowski.*

Infatti, se è $m^2 < r$, la matrice

$$(5) \qquad \begin{Vmatrix} a_{111} & a_{112} & \cdots & a_{11r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{1m1} & a_{1m2} & \cdots & a_{1mr} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m11} & a_{m12} & \cdots & a_{m1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{mm1} & a_{mm2} & \cdots & a_{mmr} \end{Vmatrix}$$

(6) I. G. Petrowski, *Über das Cauchysche Problem für Systeme von partiellen Differentialgleichungen*, «Mat. Sbornik», T. 44 (1937), pp. 815–870. In particolare pp. 816–7 e 821.

ha caratteristica minore di r, e quindi il sistema di m^2 equazioni algebriche lineari nelle incognite $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$

$$a_{ij1}\alpha_1 + \cdots + a_{ijr}\alpha_r = 0, \qquad (i, j = 1, \cdots, m)$$

ammette almeno una soluzione non nulla, in corrispondenza alla quale il determinante, che figura al primo membro della (3), si riduce al prodotto $A\rho^m$, e pertanto l'equazione (3) ammette la radice $\rho = 0$ multipla dell'ordine di molteplicità m, vale a dire il sistema (2) non può essere iperbolico secondo Petrowski.

3. RIDUZIONE DI UN SISTEMA ALLA FORMA CARATTERISTICA (II): RADICI CARATTERISTICHE REALI E DISTINTE. – Considerato il sistema quasi-lineare (7)

$$(6) \qquad \frac{\partial z_j}{\partial x} = G_j(x, y_1, \cdots, y_r; z_1, \cdots, z_m) - \sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} b_{jsk}(x, y_1, \cdots, y_r; z_1, \cdots, z_m)\frac{\partial z_s}{\partial y_k}, \qquad (j = 1, \cdots, m),$$

vediamo quando è riducibile alla forma caratteristica (II), supponendo che *ciascuna delle r equazioni algebriche in λ*

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} b_{11k}-\lambda & b_{12k} & \cdots & b_{1mk} \\ b_{21k} & b_{22k}-\lambda & \cdots & b_{2mk} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{m1k} & b_{m2k} & \cdots & b_{mmk}-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

che si hanno per $k = 1, \cdots, r$, abbia m radici reali e distinte.

a) Osserviamo, innanzi tutto, che dal sistema (II), tenuto presente che il determinante

$$(8) \qquad C(\cdots) = \begin{vmatrix} c_{11}(\cdots) & \cdots & c_{1m}(\cdots) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1}(\cdots) & \cdots & c_{mm}(\cdots) \end{vmatrix}$$

è supposto uguale all'unità (8), in virtù della regola di Cramer segue elementarmente

$$(9) \qquad \frac{\partial z_j}{\partial x} = \sum_{i=1}^{m} C_{ij} g_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{s=1}^{m}\sum_{k=1}^{r} C_{ij} c_{is} f_{ik} \frac{\partial z_s}{\partial y_k}, \qquad (j = 1, \cdots, m),$$

ove si è indicato con $C_{ij}(\cdots)$, $(i, j = 1, \cdots, m)$ il complemento algebrico dell'elemento $c_{ij}(\cdots)$ del determinante (8). Pertanto è ovvio che basta rilevare sotto quali condizioni esistono $m^2 + mr$ funzioni $C_{ij}(x, y_1, \cdots, y_r; z_1, \cdots, z_m)$, $(i, j = 1, \cdots, m)$, $f_{ik}(x, y_1, \cdots, y_r; z_1, \cdots, z_m)$, $(i = 1, \cdots, m; k = 1, \cdots, r)$

(7) È ovvio che, sotto la condizione che il determinante A (vedi n. 2) sia diverso da zero, ogni sistema (2) è riconducibile alla forma (6).

(8) Basterebbe supporre $C(\cdots) \neq 0$, e quindi, per semplicità di scrittura, si può senza altro ritenere $C(\cdots) = 1$.

con

$$
\begin{vmatrix} C_{11}(\cdots) & C_{12}(\cdots) & \cdots & C_{1m}(\cdots) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{m1}(\cdots) & C_{m2}(\cdots) & \cdots & C_{mm}(\cdots) \end{vmatrix} = 1 , \tag{10}
$$

tali che siano verificate le $m^2 r$ equazioni

$$
\sum_{i=1}^{m} C_{ij}(\cdots)\, c_{is}(\cdots)\, f_{ik}(\cdots) = b_{jsk}(\cdots) , \qquad (j, s = 1, \cdots, m ; k = 1, \cdots, r) \tag{11}
$$

nelle $m^2 + mr$ incognite C_{ij}, f_{ik}.

A tal uopo, in corrispondenza a ogni valore fissato di k, possiamo raggruppare le (11) negli m sistemi (che si hanno per $j = 1, \cdots, m$) di m equazioni algebriche lineari nelle m incognite $f_{1k}, \cdots, f_{mk}$

$$
\begin{cases} C_{1j}\, c_{11} f_{1k} + C_{2j}\, c_{21} f_{2k} + \cdots + C_{mj}\, c_{m1} f_{mk} = b_{j1k} \\ C_{1j}\, c_{12} f_{1k} + C_{2j}\, c_{22} f_{2k} + \cdots + C_{mj}\, c_{m2} f_{mk} = b_{j2k} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{1j}\, c_{1m} f_{1k} + C_{2j}\, c_{2m} f_{2k} + \cdots + C_{mj}\, c_{mm} f_{mk} = b_{jmk} ; \end{cases} \tag{12}
$$

in virtù della (10), da cui, tenuta presente la (8), si può dedurre ancora $C(\cdots) = 1$, per la regola di Cramer abbiamo immediatamente per $i = 1, \cdots, m$ (9)

$$
f_{ik} = \frac{\begin{vmatrix} C_{1j}\, c_{11} & \cdots & C_{i-1,j}\, c_{i-1,1} & b_{j1k} & C_{i+1,j}\, c_{i+1,1} & \cdots & C_{mj}\, c_{m1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{1j}\, c_{1m} & \cdots & C_{i-1,j}\, c_{i-1,m} & b_{jmk} & C_{i+1,j}\, c_{i+1,m} & \cdots & C_{mj}\, c_{mm} \end{vmatrix}}{C_{1j} \cdots C_{ij} \cdots C_{mj}} = \tag{13}
$$

$$
= \frac{C_{i1}\, b_{j1k} + C_{i2}\, b_{j2k} + \cdots + C_{im}\, b_{jmk}}{C_{ij}} .
$$

Al variare di j otteniamo, per ogni f_{ik}, m valori, che devono essere uguali tra loro

$$
\frac{C_{i1}\, b_{11k} + C_{i2}\, b_{12k} + \cdots + C_{im}\, b_{1mk}}{C_{i1}} = \cdots = \frac{C_{i1}\, b_{m1k} + C_{i2}\, b_{m2k} + \cdots + C_{im}\, b_{mmk}}{C_{im}} , \tag{14}
$$

ossia, indicato con λ il comune valore dei rapporti (14), abbiamo il sistema

$$
\begin{cases} C_{i1}(b_{11k} - \lambda) + C_{i2}\, b_{12k} + \cdots + C_{im}\, b_{1mk} = 0 \\ C_{i1}\, b_{21k} + C_{i2}(b_{22k} - \lambda) + \cdots + C_{im}\, b_{2mk} = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ C_{i1}\, b_{m1k} + C_{i2}\, b_{m2k} + \cdots + C_{im}(b_{mmk} - \lambda) = 0 , \end{cases} \tag{15}
$$

la cui risoluzione dipende dall'equazione caratteristica (7), la quale risulta indipendente dall'intero positivo j, il quale assume i valori $1, 2, \cdots, m$.

(9) A questo punto si dovrebbe supporre $C_{ij} \neq 0$, $(i, j = 1, \cdots, m)$, ma, in virtù della (10), ciò è superfluo, perché di proposito tutte le considerazioni successive alla (15) sono state sviluppate in modo che siano valide indipendentemente dalle disuguaglianze in questione.