Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Jacques Louis Lions, Enrico Magenes

Quelques remarques sur les problèmes aux limites linéaires elliptiques et paraboliques dans des classes d'ultra-distributions. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **43** (1967), n.5, p. 293–299.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_5_293_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1967.

Analisi matematica. — *Quelques remarques sur les problèmes aux limites lineaires elliptiques et paraboliques dans des classes d'ultra-distributions* (*). Nota I di JACQUES LOUIS LIONS e ENRICO MAGENES, presentata (**) dal Corrisp. L. AMERIO.

RIASSUNTO. — In recenti lavori ([13],..., [16]) abbiamo studiati i problemi ai limiti non omogenei per gli operatori lineari ellittici e parabolici in varie classi di distribuzioni e di ultra-distribuzioni. Completiamo ora i precedenti risultati e diamo delle generalizzazioni. Le dimostrazioni dettagliate saranno esposte nel terzo volume del nostro libro [17] (cfr. di già [13],..., [16], [27]).

EQUATIONS ELLIPTIQUES.

1. Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ de frontière Γ variété analytique réelle de dimension $n - 1$, Ω étant localement d'un seul coté de Γ. Soit

$$(1) \qquad Au = \sum_{|p|,|q| \leq m} (-1)^{|p|} D^p (a_{pq}(x) D^q u)$$

un opérateur différentiel linéaire, à coefficients a_{pq} analytiques dans $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, *proprement elliptique* dans $\overline{\Omega}$ (1), d'ordre $2m$.

On se donne un système d'opérateurs « frontière »

$$(2) \qquad B_j u = \sum_{|h| \leq m_j} b_{jh}(x) D^h u \qquad j = 0, 1, \cdots, m - 1$$

d'ordre m_j, avec $0 \leq m_j < 2m$, à coefficients b_{jh} analytiques sur Γ, *normal* sur Γ (2) et qui *recouvre* A *sur* Γ (3).

Désignons par A^* l'adjoint formel (au sens des distributions dans Ω) de A.

On peut toujours – et de façon non unique – choisir un autre système d'opérateurs « frontière » $\{S_j\}_{j=0}^{m-1}$, normal sur Γ, S_j étant à coefficients analytiques sur Γ et d'ordre μ_j, avec $0 \leq \mu_j < 2m$, tel que le système $\{B_0, \cdots, B_{m-1}; S_0, \cdots, S_{m-1}\}$ soit normal sur Γ et que les ordres m_j, μ_j, $j = 0, \cdots, m - 1$, parcourrent exactement l'ensemble $\{0, 1, \cdots, 2m - 1\}$. Alors (Aronszajn–Milgram [2]) il existe $2m$ opérateurs « frontière » C_j, T_j, $j = 0, \cdots, m - 1$, définis de façon unique, à coefficients analytiques sur Γ l'ordre de C_j étant $2m - 1 - \mu_j$ et celui de T_j $2m - 1 - m_j$, le système

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei gruppi di ricerca del Comitato per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1967.

(1) (2) (3) Toutes les définitions sont prises au sens usuel; cf. par exemple Lions–Magenes [13].

$\{C_0, \cdots, C_{m-1}; T_0, \cdots, T_{m-1}\}$ étant normal sur Γ, de telle sorte que l'on ait la *formule de Green suivante*

$$\int_\Omega Au\,\bar{v}\,dx - \int_\Omega u\,\overline{A^* v}\,dx = \sum_{j=0}^{m-1}\int_\Gamma S_j u\,\overline{C_j v}\,d\sigma - \sum_{j=0}^{m-1}\int_\Gamma B_j u\,\overline{T_j v}\,d\sigma \tag{3}$$

pour tout u et v appartenant à $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ ($= C^\infty(\overline{\Omega})$ = espace des fonctions indéfiniment différentiables dans $\overline{\Omega}$).

On introduit encore les espaces

$$N = \{u \mid u \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega}),\ Au = 0\,;\ B_j u = 0,\ j = 0, \cdots, m-1\} \tag{4}$$

$$N^* = \{v \mid v \in \mathfrak{D}(\overline{\Omega}),\ A^* v = 0\,;\ C_j v = 0,\ j = 0, \cdots, m-1\}. \tag{5}$$

Soit enfin $K(\Omega)$ un espace de fonctions vérifiant

(6)
- $K(\Omega)$ est un espace vectoriel topologique localement convexe, complet, séparé et reflexif;
- $\mathfrak{D}(\overline{\Omega}) \subset K(\Omega) \subset L^2(\Omega)$;
- $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $K(\Omega)$ [4].

Alors le dual (fort) $K'(\Omega)$ de $K(\Omega)$ est un espace de distributions dans Ω.

Il existe de tels espaces. Par exemple on peut prendre pour $K(\Omega)$ l'espace $\Xi(\Omega)$ défini de la façon suivante: soit $\rho(x)$ une fonction de $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$, positive dans Ω, nulle sur Γ du même ordre que la distance $d(x, \Gamma)$ de x à Γ $\left(\text{i.e. } \lim_{x \to x_0 \in \Gamma} \frac{\rho(x)}{d(x, \Gamma)} = d \neq 0\right)$; soit alors

$$\Xi(\Omega) = \{u \mid \rho^{|\alpha|} D^\alpha u \in L^2(\Omega),\ \forall \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)\}\,; \tag{7}$$

muni de la famille de semi-normes

$$\|\rho^{|\alpha|} D^\alpha u\|_{L^2(\Omega)}$$

$\Xi(\Omega)$ est un espace de Fréchet et $\mathfrak{D}(\Omega)$ est dense dans $\Xi(\Omega)$ (cfr. [13]) [5].

2. Rappelons les résultats suivants de [13]. Introduisons l'espace

$$Y = \{u \mid u \in \mathfrak{D}'(\Omega),\ Au \in K'(\Omega)\} \tag{8}$$

muni de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $u \to u$ et $u \to Au$ de Y dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$ et $K'(\Omega)$ respectivement.

(4) Notations habituelles de L. Schwartz [21]: $\mathfrak{D}(\Omega)$ est l'espace des fonction indéfiniment différentiables dans Ω, à support compact dans Ω, muni de la topologie de Schwartz et $\mathfrak{D}'(\Omega)$, dual (fort) de $\mathfrak{D}(\Omega)$, est l'espace des distributions dans Ω.

(5) $\Xi'(\Omega)$, dual de $\Xi(\Omega)$, est formé des distributions f pouvant se représenter sous la forme $f = \sum_{\text{finie}} D^\alpha(\rho^{|\alpha|} f_\alpha)$ avec $f_\alpha \in L^2(\Omega)$.

Alors (cfr. [13])

THEOREME 1 (*de trace sur* Γ). – *L'espace* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans* Y *et l'application* $u \to \mathrm{B}u = \{\mathrm{B}_0 u, \cdots, \mathrm{B}_{m-1} u\}$ *définie au sens usuel de* $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ *dans* $[\mathcal{D}(\Gamma)]^m$ (6), *se prolonge par continuité en une application linéaire continue, encore notée* $u \to \mathrm{B}u$, *de* Y *dans* $[\mathcal{H}'(\Gamma)]^m$ (7).

Introduisons maintenant l'espace

$$\{\mathrm{K}'(\Omega) \times [\mathcal{H}'(\Gamma)]^m ; \mathrm{N}^*, \mathcal{C}\}$$

des éléments $(f; g_0, \cdots, g_{m-1}\}$ appartenant à $\mathrm{K}'(\Omega) \times [\mathcal{H}'(\Gamma)]^m$ et satisfaisant à

$$\langle f, \bar{v}\rangle + \sum_{j=0}^{m-1} \langle g_j, \overline{\mathrm{T}_j v}\rangle = 0 \qquad \forall v \in \mathrm{N}^* \tag{9}$$

le premier crochet désignant la dualité entre $\mathrm{K}'(\Omega)$ et $\mathrm{K}(\Omega)$ et les autres la dualité entre $\mathcal{H}'(\Gamma)$ et $\mathcal{H}(\Gamma)$. Alors (cfr. [13]):

THEOREME 2 (*d'existence*). – *L'application*

$$u \to \{\mathrm{A}u ; \mathrm{B}_0 u, \cdots, \mathrm{B}_{m-1} u\}$$

est un isomorphisme (*algébrique et topologique*) *de* Y/N (espace quotient de Y par rapport à N) *sur* $\{\mathrm{K}'(\Omega) \times [\mathcal{H}'(\Gamma)]^m ; \mathrm{N}^*, \mathcal{C}\}$.

En particulier le théorème 2 affirme que le problème aux limites

$$\mathrm{A}u = f \qquad \text{au sens de } \mathcal{D}'(\Omega) \tag{10}$$

$$\mathrm{B}_j u = g_j, \qquad j = 0, \cdots, m-1, \text{ au sens du Théorème 1} \tag{11}$$

admet une solution $u \in \mathrm{Y}$, *détérminée à l'addition d'une fonction de* N *près, pour tout élément* $\{f; g_0, \cdots, g_{m-1}\}$ *de* $\mathrm{K}'(\Omega) \times [\mathcal{H}'(\Gamma)]^m$ *satisfaisant aux relations de compatibilité* (9).

Remarque 1. – On pourrait dans les Théorèmes 1 et 2 prendre au lieu de l'espace $\mathrm{K}'(\Omega)$ définit par (6) un espace plus général de distributions dépendant également des opérateurs frontière $\{\mathrm{B}_j\}_{j=0}^{m-1}$.

3. *La méthode utilisée dans* [13] *est aussi applicable dans une situation encore plus générale, en considérant l'équation* (10) *au sens des « ultra-distributions » dans* Ω. Nous donnerons ici les résultats pour la classe des ultradistributions que nous appellerons *ultra-distributions* (ou distributions) de Gevrey, en renvoyant à [17] vol. 3 pour des classes plus générales, déterminées par des suites $\{\mathrm{M}_k\}$ non-quasi analytiques et vérifiant certaines conditions de croissance (le cas des distributions de Gevrey étant donné par $\mathrm{M}_k = (k!)^s$, s réel > 1), et pour les démonstrations.

Soit donc *s réel fixé*, avec $s > 1$. On désignera par $\mathcal{D}_s(\Omega)$ l'espace des fonctions $x \to \varphi(x)$ indéfiniment différentiables et à support compact dans Ω

(6) $\mathcal{D}(\Gamma)$ = espace des fonctions indéfiniment différentiables sur Γ.

(7) $\mathcal{H}(\Gamma)$ désigne l'*espace des fonctions analytiques* sur Γ ; $\mathcal{H}'(\Gamma)$ est le dual (fort) de $\mathcal{H}(\Gamma)$, i.e. *l'espace des fonctionnelles analytiques* sur Γ; cf. par ex. [13].

et telles qu'il existe deux constantes c et L (dépendant de φ) telles que

$$\sup_{x \in \Omega} |D^p \varphi(x)| \leq c L^k (k!)^s \quad \forall |p| = k, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots. \tag{12}$$

On introduit dans $\mathfrak{D}_s(\Omega)$ une topologie de la façon suivante. Soit Ω_i une suite d'ouverts de $\mathbf{R}^n$ tels que

$$\overline{\Omega}_i \subset \Omega_{i+1} \quad , \quad \bigcup_i \Omega_i = \Omega .$$

On considère l'espace $\mathfrak{D}_s^{(i)}(\Omega)$ des fonctions φ de $\mathfrak{D}_s(\Omega)$ à support contenu dans Ω_i et pour lesquelles (12) a lieu avec $L = L_i$ ($\{L_i\}$ suite croissante et tendant vers $+\infty$); l'espace $\mathfrak{D}_s^{(i)}(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|\varphi\| = \sup_k \sup_{|p|=k} \sup_{x \in \overline{\Omega}_i} \frac{|D^p \varphi(x)|}{L_i^k (k!)^s} .$$

On a alors $\mathfrak{D}_s(\Omega) = \bigcup_i \mathfrak{D}_s^{(i)}(\Omega)$ et on munit $\mathfrak{D}_s(\Omega)$ de la topologie de limite inductive des topologies des $\mathfrak{D}_s^{(i)}(\Omega)$ (elle ne dépend pas des suites $\{\Omega_i\}$ et $\{L_i\}$ considérées).

Par définition l'espace $\mathfrak{D}'_s(\Omega)$ *des distributions de Gevrey d'ordre s dans* Ω *est le dual fort de* $\mathfrak{D}_s(\Omega)$.

Rappelons les propriétés suivantes (cfr. [10], [11], [18], [19])

1) $\mathfrak{D}_s(\Omega)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

2) On a les inclusions suivantes

$$\mathfrak{D}_{s_1}(\Omega) \subset \mathfrak{D}_{s_2}(\Omega) \subset \mathfrak{D}(\Omega) \subset \mathfrak{D}'(\Omega) \subset \mathfrak{D}'_{s_2}(\Omega) \subset \mathfrak{D}'_{s_1}(\Omega), \qquad 1 < s_1 < s_2 < \infty \tag{13}$$

chaque espace étant dense et continuement plongé dans les suivants.

3) $\mathfrak{D}_s(\Omega)$ est un espace séparé, complet, de Montel, tonnelé, bornologique, de type $(\mathfrak{D}\mathfrak{F})$ (et par conséquent réflexif), et nucléaire. $\mathfrak{D}'_s(\Omega)$ est un espace de Frechet.

4) La dérivation dans $\mathfrak{D}'_s(\Omega)$ se définit comme dans $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

5) De même on définit aisément la multiplication dans $\mathfrak{D}'_s(\Omega)$ par les fonctions analytiques dans Ω, pour *tout* $s > 1$.

Nous désignerons par $\mathfrak{D}_s(\overline{\Omega})$, l'espace des fonctions $x \rightarrow \varphi(x)$ indéfiniment différentiables dans $\overline{\Omega}$ telles qu'il existe deux constantes c et L, dépendant de φ, pour lesquelles (12) soit satisfaite; on munit de façon évidente cet espace d'une topologie de limite inductive d'espaces de Banach.

Enfin soit $K_s(\Omega)$ un espace de fonctions vérifiant

$$\left\{ \begin{array}{l} K_s(\Omega) \text{ est un espace localement convexe complet, separé, et réflexif,} \\ \mathfrak{D}_s(\overline{\Omega}) \subset K_s(\Omega) \subset L^2(\Omega), \\ \mathfrak{D}_s(\Omega) \text{ est dense dans } K_s(\Omega). \end{array} \right. \tag{13}$$

Alors le dual (fort) $K'_s(\Omega)$ de $K_s(\Omega)$ est un espace d'ultradistributions de Gevrey d'ordre s dans Ω.

Il existe de tels espaces; par exemple $\Xi(\Omega)$ définit par (7).

Cela posé les Théorèmes 1 et 2 peuvent être généralisés de la façon suivante. Soit Y_s l'espace

$$Y_s = \{u \mid u \in \mathfrak{D}'_s(\Omega)\,,\ Au \in K'_s(\Omega)\} \qquad 1 < s < \infty$$

muni de la topologie localement convexe la moins fine rendant continues les applications $u \to u$ et $u \to Au$ de Y dans $\mathfrak{D}'_s(\Omega)$ et $K_s(\Omega)$ respectivement. Alors

THEOREME 3. – *L'espace* $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ *est dense dans* Y_s *et l'application* $u \to Bu = \{B_0 u, \cdots, B_{m-1} u\}$ *de* $\mathfrak{D}(\overline{\Omega})$ *dans* $[\mathfrak{D}(\Gamma)]^m$ *se prolonge par continuité en une application linèaire continue de* Y_s *dans* $[\mathcal{H}'(\Gamma)]^m$.

THEOREME 4. – *L'application*

$$u \to \{Au\,;\ B_0 u, \cdots, B_{m-1} u\}$$

est un isomorphisme (*algébrique et topologique*) *de* Y_s/N *sur* $\{K'_s(\Omega) \times [\mathcal{H}'(\Gamma)]^m; N^*, \mathcal{T}\}$ (8).

Remarque 2. – On pourrait dans les Théorèmes 2 et 4 prendre au lieu de l'espace $K'_s(\Omega)$ un espace plus général d'ultra-distributions, dépendant des opérateurs frontière $\{B_j\}_{j=0}^{m-1}$ et contenu dans $\mathfrak{D}'_s(\Omega)$.

4. Les théorèmes précédents mettent en évidence le fait que les deux différents espaces Y et Y_s *ont le même espace « de traces »*.

Une conséquence de ce résultat concerne la régularité des solutions des équations elliptiques au sens des ultra-distributions; on a en effet, par utilisation des théoremes 3, 4 et 2, le

COROLLAIRE 1. – *Toute ultradistribution u de* $\mathfrak{D}'_s(\Omega)$, *solution* (au sens de $\mathfrak{D}'_s(\Omega)$) *de l'équation* $Au = f$, *avec* (par exemple) $f \in \Xi'(\Omega)$, *est une distribution ordinaire de* $\mathfrak{D}'(\Omega)$.

Le Corollaire 1 réduit donc le problème de la régularité des solution ultra-distributions de Gevrey des équations elliptiques au cas déjà résolu des solutions distributions ordinaires (donc en particulier si f est analytique, u est aussi analytique). Dans le cas des opérateurs à coefficients constants et par des méthodes différents un résultat analogue a été donné par C. C. Chou [8] pour les solutions ultra distributions de Gevrey, par C. Björck [6] pour les solutions ultra-distributions de Beurling [5] et par G. Bengel [3] [4] et F. R. Harvey-H. Komatsu [12] pour les solutions hyperfonctions de Satö [20]; cfr. aussi Silva [25]. Dans le cas des opérateurs à coefficients variables le même problème de régularité a été étudié et resolu par des méthodes différentes par L. Boutet de Monvel et P. Krée [26].

(8) Espace des elements $\{f; g_0, \cdots, g_{m-1}\}$ appartenant à $K_s(\Omega) \times [\mathcal{H}'(\Gamma)]^m$ et satisfaisant à (9).

BIBLIOGRAPHIE.

[1] AGRANOVICH M. S. et VISHIK M. I., *Problèmes elliptiques avec paramètre et problèmes paraboliques de type général*, « Uspehi Mat. Nauk », *19*, n. 3 (1964), 53–161 « Russian Math. Surv. », *19*, 53–157 (1964).

[2] ARONSZAJN N. et MILGRAM A. N., *Differential operators on Riemannian manifolds*, «Rend. Circ. Mat. Palermo », *2*, 1–61 (1952).

[3] BENGEL G., a) *Sur une extension de la théorie des hyperfonctions*; b) *Régularité des solutions hyperfonctions d'une équation elliptique*, « C. R. Acad. Sci. Paris », 262, Série A (1966).

[4] BENGEL G., *Das Weyl'sche lemma in der theorie der hyperfunktionen* (à paraître).

[5] BEURLING A., *Quasi-analyticity and general distributions, Lectures 4 and 5.* A.M.S. Summer institute, Stanford 1961 (mimeographed).

[6] BJÖRCK G.; *Linear partial differential operators and generalized distributions*, « Arkiv for Math. », *6*, n. 21, 351–407 (1966).

[7] CAVALLUCCI A., *Sulle proprietà differenziali delle soluzioni delle equazioni quasi-ellittiche*, « Ann. Mat. pura appl. », *67*, 143–168, (1965).

[8] CHOU C. C., *Problème de régularité universelle*, « C. R. Acad. Sci. Paris », *260*, 4397–4399 (1965).

[9] FRIEDMAN A., *Generalized functions and partial differential equations.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1963.

[10] GELFAND I. M. et SILOV G., *Fonctions generalisées* I–III. « Fizmatgiz », Moscow 1958 (Russian). Traduction allemande. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1960–1964.

[11] GEYMONAT G., *Proprietà di alcuni spazi di funzioni indefinitamente derivabili a valori vettoriali*, « Ann. Mat. pura appl. », *76*, 203–232 (1967).

[12] HARVEY F. R. et KOMATSU H., *Comunication au Congrès international des Mathematiciens de Moscou*, août 1966.

[13] LIONS J. L. et MAGENES E., *Problèmes aux limites non homogènes*, (VII), « Ann. Mat. pura appl. », *63*, 201–224 (1963).

[14] LIONS J. L. et MAGENES E., *Sur certain aspects des problèmes aux limites non homogènes pour des opérateurs paraboliques*, « Ann. Sc. Norm. Sup., Pisa », *18*, 303–344 (1964).

[15] LIONS J. L. et MAGENES E., *Espaces de fonctions et distributions du type de Gevrey et problèmes aux limites paraboliques*, « Ann. Mat. pura appl. », *68*, 341–418 (1965),

[16] LIONS J. L. et MAGENES E. *Espaces du type de Gevrey et problèmes aux limites pour diverses classes d'équations d'évolution*, « Ann. Mat. pura appl. », *72*, 343–394 (1966).

[17] LIONS J. L. et MAGENES E., *Problèmes aux limites non homogènes et applications.* Dunod, Paris 1968.

[18] MYTYAGIN B. S., *Nuclearité et autres propriétées des espaces de type S*, « Trudy Mosk. Mat. ob-wa », *9*, 317–328 (1960).

[19] ROUMIEU C., *Sur quelques extensions de la notion de distributions*, « Ann. Sc. Ec. Norm. Sup »., *77*, 47–121 (1960).

[20] SATO T., *Theory of Hyperfunctions* I, II; « J. Sac. Sci. Tokyo », *8*, 139–193 et 287–437 (1959–60).

[21] SCHWARTZ L., *Théorie des distributions*, I *et* II, Hermann, Paris 1950–51.

[22] SCHWARTZ L., *Espaces de fonctions différentiables à valeurs vectorielles*, « Journal d'Analyse Math. », *4*, 98–148 (1954–55).

[23] SCHWARTZ L., *Théorie des distributions à valeurs vectorielles*, I, II, « Annales Institut Fourier », *7*, 1–209 (1958).

[24] SILVA S., *Su certe classi di spazi localmente convessi importanti per le applicazioni*, « Rend. Sem. Mat. Univ. Roma », *14*, 388–410 (1955).

[25] SILVA S., *O lemma de Weyl no quadro das ultradistribuicoes*, « Bol. Acad. Ci Lisboa », *38*, 70–79 (1965).

[26] BOUTET DE MONVEL L. et KRÉE P., *Pseudodifferential operators and Gevrey classes*, « C. R. Acad. Sci. Paris », 263 (1966), série A; « Ann. Inst. Fourier », *17*, 295–323 (1967).

[27] MAGENES E., *Problemès aux limites dans des espaces de fonctions et de ultra-distributions du type de Gevrey*, Communication au Congrès International des Mathématiciens de Moscou, août 1966.