Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Mario Dolcher

Sulla convergenza puntuale delle funzioni

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **43** (1967), n.5, p. 300–304.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_5_300_0>

Analisi matematica. — *Sulla convergenza puntuale delle funzioni.* Nota [(*)] di MARIO DOLCHER, presentata [(**)] dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — In the set of real-valued continuous functions on a real interval, the sequential closure with respect to pointwise convergence fails to satisfy the idempotence condition. The result is here obtained through the construction of a counterexample.

È noto (R. Baire, 1899) che nell'insieme delle funzioni a valore reale definite su un intervallo la chiusura successionale rispetto alla convergenza puntuale (che indichiamo con $\widehat{\ }$) non è idempotente: ad esempio, se C è l'insieme delle funzioni continue, si ha $\widehat{\widehat{\mathrm{C}}} \neq \widehat{\mathrm{C}}$.

Tale risultato classico ha lasciato aperto il problema, se l'operazione medesima sia o meno idempotente quando la si pensi entro l'insieme ambiente C. In altre parole: detto A un insieme di funzioni continue, supposto che f_n, per $n = 1, 2, \cdots$, sia una funzione continua limite di una successione di funzioni di A e supposto che la successione (f_n) converga ad una funzione continua f, esiste necessariamente una successione di funzioni di A convergente verso la f? Nella presente Nota si risponde negativamente alla questione, mediante la costruzione di un controesempio.

1. Detto E un insieme dotato di una struttura di convergenza λ [(1)], per ogni A $(\subset \mathrm{E})$ indichiamo con $\widehat{\mathrm{A}}$ l'insieme dei punti–limite delle successioni di punti di A (*chiusura successionale* di A). Com'è noto, tale chiusura soddisfa in ogni caso ai primi tre assiomi di Kuratowski ($\widehat{\emptyset} = \emptyset$, $\widehat{\mathrm{A}} \supset \mathrm{A}$, $\widehat{(\mathrm{A} \cup \mathrm{B})} = \widehat{\mathrm{A}} \cup \widehat{\mathrm{B}}$) ma non è, in generale, idempotente: da una λ non si ottiene dunque, in generale, direttamente una topologia (ma soltanto indirettamente, mediante un procedimento di iterazione transfinita [(2)]).

2. La costruzione dell'annunciato controesempio è basata su una rappresentazione dei numeri reali mediante successioni di numeri naturali, che esporremo qui separatamente.

Sia

$$\mathrm{I} = \{x : 0 \leq x < 1\}.$$

(*) Questo lavoro si inserisce nel programma del gruppo di ricerca n. 24 del C.N.R. (anno 1966–67).

(**) Nella seduta del 14 novembre 1967.

(1) nel senso detto di Fréchet–Urysohn, più precisamente formulato in P. ALEXANDROFF e P. URYSOHN, *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un espace* ($\mathfrak{L}$) *soit une classe* ($\mathfrak{D}$), «C. R. Acad. Sci». Paris *177* (1923), p. 1274. L'argomento è esposto e approfondito in M. DOLCHER, *Topologie e strutture di convergenza*, «Ann. Sc. Norm. Sup.», Pisa, Serie III, Vol. XIV (1960), pp. 63–92.

(2) M. DOLCHER, *loc. cit.* in (1), pp. 85–86.

LEMMA. – *È possibile una corrispondenza biunivoca fra* I *e l'insieme* S *delle successioni di numeri naturali, la quale sia anche ordinata rispetto all'ordine naturale in* I *e all'ordine lessicografico in* S.

Dimostrazione. – Si pensino i numeri di I rappresentati nel sistema di numerazione di base 2, mediante successioni di cifre zero ed 1 nelle quali ricorra infinite volte la cifra zero. Per ogni $x \in \mathrm{I}$ si consideri dapprima la successione crescente degl'interi che indicano i posti ai quali nella scrittura binaria di x compare la cifra zero: sia $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$ tale successione, e sia, convenzionalmente, $r_0 = 0$.

Si ponga poi

$$h_n = r_n - r_{n-1} - 1 \qquad (n = 1, 2, \cdots)$$

e si consideri associata al numero x la successione (h_n) $(\in \mathrm{S})$.

La corrispondenza così ottenuta è biunivoca. Invero, ogni successione (h_n) di numeri naturali è la corrispondente, nel senso della legge su definita, di un unico numero di I: quello la cui rappresentazione binaria porta la cifra zero nei posti

$$h_1 + 1 \quad , \quad h_1 + h_2 + 2 , \cdots , h_1 + h_2 + \cdots + h_n + n , \cdots$$

e la cifra 1 nei posti rimanenti.

Proviamo poi che la corrispondenza è anche ordinata, nel senso precisato in enunciato.

Suppongasi

$$(h_1 , h_2 , \cdots , h_n , \cdots) < (k_1 , k_2 , \cdots , k_n , \cdots)$$

ossia $h_j < k_j$ con $j = \min \{i : h_i \neq k_i\}$. Detti x , y i numeri di I corrispondenti rispettivamente alle due date successioni, le loro scritture binarie hanno uguali le cifre fino al posto $\sum_1^j {}_i h_i + j$ escluso, ed in quel posto x la cifra zero ed y ha cifra 1; è dunque $x < y$.

Utilizzeremo una tale corrispondenza biunivoca fra I ed S scrivendo

$$x = (h_1 , h_2 , \cdots , h_n , \cdots) \qquad (h_n \in \mathrm{N})$$

(*scrittura successionale* del numero x). Nel caso che sia $h_i = 0$ per $i > n$ (il che equivale all'essere x un numero del tipo $r/2^s$) indicheremo brevemente la successione con $(h_1 , h_2 , \cdots , h_n)$.

Chiameremo *coordinate del numero* x gl'interi h_i.

3. Siano fissati due interi h , k positivi arbitrari.

Per ogni $(h - 1)$–pla di numeri naturali tutti minori di k,

$$\mu = (m_1 , m_2 , \cdots , m_{h-1}) \qquad (m_i < k) \text{ (3)},$$

sia

$$\mathrm{F}^{\mu}_{h,k} = \{x : (m_1, m_2, \cdots , m_{h-1} , k) \leq x \leq (m_1 , m_2 , \cdots , m_{h-1} , k+1)\}$$

(3) Per $h = 1$, quale che sia k, μ è necessariamente la 0–pla.

e sia

$$F_{h,k} = \cup_\mu F^\mu_{h,k},$$

intendendosi la riunione estesa a tutte le $(h-1)$–ple μ del tipo detto.

Per $\mu' \neq \mu''$ è $F^{\mu'}_{h,k} \cap F^{\mu''}_{h,k} = \varnothing$: e invero, l'essere $x \in F^\mu_{h,k}$ implica che le prime $h-1$ coordinate di x sono i numeri della $(h-1)$–pla μ. Notiamo anche che $F^\mu_{h,k}$ è la riunione di k^{h-1} intervalli chiusi a due a due disgiunti.

Consideriamo ancora gl'intervalli aperti

$$A^\mu_{h,k} = \{x : (m_1, m_2, \cdots, m_{h-1}, k-1) < x < (m_1, m_2, \cdots, m_{h-1}, k)\},$$

$$B^\mu_{h,k} = \{x : (m_1, m_2, \cdots, m_{h-1}, k+1) < x < (m_1, m_2, \cdots, m_{h-1}, k+2)\}.$$

Evidentemente, per ogni coppia di interi positivi h, k e per ogni μ i tre intervalli $A^\mu_{h,k}, F^\mu_{h,k}, B^\mu_{h,k}$ sono, nell'ordine, consecutivi.

Ogni insieme del tipo

$$G^\mu_{h,k} = A^\mu_{h,k} \cup F^\mu_{h,k} \cup B^\mu_{h,k}$$

è dunque un intervallo aperto. Quali che siano h, k, per $\mu' \neq \mu''$ è $G^{\mu'}_{h,k} \cap G^{\mu''}_{h,k} = \varnothing$.

Poniamo ancora

$$A_{h,k} = \cup_\mu A^\mu_{h,k} \quad , \quad B_{h,k} = \cup_\mu B^\mu_{h,k} \quad , \quad G_{h,k} = \cup_\mu G^\mu_{h,k},$$

le riunioni essendo da interpretarsi nel senso detto sopra per $F_{h,k}$.

4. Passiamo ora a definire una doppia successione di funzioni $(f_{h,k})$ $(h \in N^+, k \in N^+)$. Precisamente, poniamo:

$f_{h,k}(x) = 1$ per $x \in F_{h,k}$;
$f_{h,k}$ lineare, crescente da zero a 1 su ciascuno degl'intervalli $\bar{A}^\mu_{h,k}$;
$f_{h,k}$ lineare, decrescente da 1 a zero su ciascuno degl'intervalli $\bar{B}^\mu_{h,k}$;
$f_{h,k}(x) = 0$ per $x \notin G_{h,k}$.

Si tratta manifestamente di funzioni continue in $\bar{I}$.

Proviamo anzitutto che *per ogni h la successione $(f_{h,k})_k$* (4) *converge puntualmente a zero in $\bar{I}$*.

Fissato che sia h, un punto $x = (m_1, m_2, \cdots, m_n, \cdots)$ può appartenere a $G_{h,k}$ tutt'al più per tre valori di k. Infatti: l'essere $x \in A_{h,k}$ implica $m_h = k-1$, l'essere $x \in F_{h,k}$ implica $m_h = k$ oppure (se è $x = \max F^\mu_{h,k}$) $m_h = k+1$, e l'essere $x \in B_{h,k}$ implica $m_h = k+1$. Necessariamente dunque, se è $x \in G_{h,k}$, k ha uno dei tre valori $m_h - 1, m_h, m_h + 1$.

Essendo che fuori di $G_{h,k}$ la $f_{h,k}$ vale zero, per ogni punto x vi sono, in ogni successione–riga $(f_{h,k})_k$ al più tre funzioni con valore non nullo in x. Ogni successione–riga converge dunque puntualmente a zero.

(4) Quando occorre, indichiamo fuori di parentesi la variabile.

Proviamo poi che *nessuna successione del tipo* (f_{r_n, s_n}) *con* $r_1 < r_2 < \cdots$ $\cdots < r_n < \cdots$, $\sup\{s_n : n \in \mathrm{N}^+\} = +\infty$ *può convergere a zero*.

La successione (s_n) ammette, nell'ipotesi fatta, una sottosuccessione crescente (s_{i_n}): basta provare che la $(f_{r_n, s_{i_n}})$ non converge a zero. È legittimo supporre che già la (s_n) sia crescente.

Consideriamo il numero

$$\bar{x} = (m_1, m_2, \cdots, m_n, \cdots)$$

con $m_{r_i} = s_i$ ed $m_k = 0$ per gl'interi k che non compaiono nella successione (r_n). Si ha

$$\bar{x} \in \mathrm{F}_{r_i, s_i} \qquad \text{per} \quad i = 1, 2, \cdots$$

essendo che le prime $r_i - 1$ coordinate di $\bar{x}$ sono minori di s_i, mentre la r_i–ima vale s_i. Si ha dunque, in base alla definizione delle nostre funzioni,

$$f_{r_i, s_i}(\bar{x}) = 1 \qquad \text{per} \quad i = 1, 2, \cdots$$

restando così esclusa la convergenza a zero della successione (f_{r_n, s_n}).

5. Posto poi

$$f^*_{r,s} = f_{r, s+r-1} \qquad\qquad (r \in \mathrm{N}^+, s \in \mathrm{N}^+)$$

osserviamo che nessuna successione del tipo $(f^*_{r_n, s_n})$ con (r_n) crescente può convergere a zero; e invero, ogni tale successione è del tipo (f_{r_n, s'_n}) con $\lim s'_n = +\infty$, sicché la tesi consegue da quanto si è provato al n. 3.

Chiamando, in una doppia successione $(f_{r,s})$ di funzioni, *successione–riga* ogni $(f_{r,s})_s$ e *successione trasversale* ogni (f_{r_n, s_n}) con (r_n) crescente, il risultato sin qui conseguito può enunciarsi:

esiste una doppia successione di funzioni continue, ogni riga della quale converge a zero, e della quale nessuna trasversale converge a zero.

6. Consideriamo infine le funzioni $g_{r,s}$ $(r \in \mathrm{N}^+, s \in \mathrm{N}^+)$ definite in $\bar{\mathrm{I}}$ da

$$g_{r,s}(x) = f^*_{r,s}(x) + \frac{1}{r}.$$

È subito visto che si tratta di funzioni continue non costanti a due a due distinte; che ogni successione–riga converge alla funzione costante $g_r = 1/r$; che nessuna successione trasversale converge alla funzione nulla (ne seguirebbe la convergenza a zero dell'analoga successione trasversale delle $f^*_{r,s}$).

Si consideri allora l'insieme

$$\mathrm{A} = \{g_{r,s} : r \in \mathrm{N}^+, s \in \mathrm{N}^+\}.$$

Si ha

$$\frac{1}{r} \in \widehat{\mathrm{A}}, \quad \text{quindi} \quad 0 \in \widehat{\widehat{\mathrm{A}}}.$$

D'altra parte, è

$$0 \notin \widehat{A} ;$$

e infatti una successione di funzioni di A, se non ha infiniti termini di una medesima riga (nel qual caso l'eventuale limite è una costante $1/r$ oppure una funzione della riga stessa), ammette come sottosuccessione una trasversale della $(g_{r,s})$ e allora, come si è constatato, non può convergere a zero.

Ne segue dunque, come asserito, $\widehat{\widehat{A}} \neq \widehat{A}$.