Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Silvio Greco

Piattezza della chiusura henseliana

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **43** (1967), n.5, p. 329–331.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_5_329_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1967.

Algebra. — *Piattezza della chiusura henseliana*. Nota (*) di SILVIO GRECO, presentata (**) dal Corrisp. G. ZAPPA.

SUMMARY. — Statement of a theorem of flatness for the henselisation of a (not necessarily local) commutative ring, and outline of the proof.

La nozione di « chiusura henseliana » (henselisation) di un anello locale, introdotta da Nagata nel 1953, è stata successivamente estesa alla categoria delle coppie $(A, \mathfrak{m})$ (A anello commutativo, $\mathfrak{m}$ ideale) da J. P. Lafon, il quale ha dimostrato il teorema generale di esistenza ([2], theor. 1). Nel caso locale sono note diverse proprietà della chiusura henseliana (cfr. [3], cap. VII), mentre assai poco è noto nel caso non locale.

In questa Nota mi propongo di enunciare un teorema di struttura per la « H–chiusura relativa » di una coppia (teor. 1.1), dal quale discende agevolmente il teorema generale di piattezza per la chiusura henseliana, già ben noto nel caso locale (teor. 1.3). Le dimostrazioni, che qui sono appena accennate, appariranno in dettaglio in un mio prossimo lavoro dedicato allo studio della chiusura henseliana.

1. Sia $\mathcal{C}$ la famiglia delle coppie $(A, \mathfrak{m})$ dove A è un anello commutativo con identità ed $\mathfrak{m}$ è un ideale proprio di A. Se $(A, \mathfrak{m}), (B, \mathfrak{n}) \in \mathcal{C}$, un morfismo $f: (A, \mathfrak{m}) \to (B, \mathfrak{n})$ è un omomorfismo unitario di anelli $f: A \to B$ tale che $f^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$. È chiaro che con tali morfismi $\mathcal{C}$ è una categoria.

Una coppia $(A, \mathfrak{m})$ sarà detta H–coppia se ogni polinomio unitario $f(X) \in A[X]$ verifica la tesi del lemma di Hensel (per maggiori dettagli cfr. [1] o [2]). È chiaro che le H–coppie formano una sottocategoria piena $\mathcal{H}$ di $\mathcal{C}$. J. P. Lafon ha dimostrato che il funtore immersione $j: \mathcal{H} \to \mathcal{C}$ ha un funtore aggiunto $h: \mathcal{C} \to \mathcal{H}$. Tale funtore dicesi H–chiusura (o chiusura henseliana). Se A è un anello locale ed $\mathfrak{m}$ è il suo ideale massimale, $h(A, \mathfrak{m})$ coincide con la « henselization » definita da Nagata (cfr. [3] pag. 180).

Siano $(A, \mathfrak{m}) \in \mathcal{C}$, $(\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}})$ il completamento $\mathfrak{m}$–adico di $(A, \mathfrak{m})$, e $(\bar{A}, \bar{\mathfrak{m}})$ l'immagine canonica di $(A, \mathfrak{m})$ in $(\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}})$. Sia $(B, \mathfrak{n})$ l'intersezione di tutte le sotto–H–coppie di $(\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}})$ contenenti $(\bar{A}, \bar{\mathfrak{m}})$. Tale coppia esiste ed è una H–coppia ([2], § 2), e si dice H–chiusura relativa di $(A, \mathfrak{m})$ (in $(\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}})$).

La H–chiusura relativa della coppia $(A, \mathfrak{m})$ coincide con la H–chiusura di $(A, \mathfrak{m})$ quando A è un anello finitamente generato (cfr. [2], § 3).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito del raggruppamento n. 32 del Comitato Nazionale per la Matematica del CNR.

(**) Nella seduta del 14 novembre 1967.

TEOREMA 1.1. – *Siano* A *un anello regolare*, $\mathfrak{m}$ *un ideale di* A, $(B, \mathfrak{n})$ *la* H–*chiusura relativa di* $(A, \mathfrak{m})$. *Allora si ha*:

a) $(B, \mathfrak{n})$ *è una sottocoppia di* $(\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}})$, $\hat{A}$ *induce in* B *la topologia* $\mathfrak{n}$–*adica e* $(\hat{B}, \hat{\mathfrak{n}}) = (\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}})$.

b) $(B, \mathfrak{n})$ *è un anello di Zariski*.

c) $\hat{A}$ *è* B–*fedelmente piatto e* B *è* A–*piatto*.

d) B *è regolare*.

COROLLARIO 1.2. – *Sia* $A = \mathbf{Z}[X_1, \cdots, X_n]$, *e siano* $\mathfrak{a}$ *ed* $\mathfrak{m}$ *due ideali di* A *con* $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}$. *Sia* $(B, \mathfrak{n}) = h(A, \mathfrak{m})$. *Allora si ha:*

a) $h(A/\mathfrak{a}, \mathfrak{m}/\mathfrak{a}) = (B/\mathfrak{a}B, \mathfrak{n}/\mathfrak{a}B)$.

b) $B/\mathfrak{a}B$ *è* $A/\mathfrak{a}$–*piatto*.

Prova. Poiché A è un anello finitamente generato, $(B, \mathfrak{n})$ coincide con la H–chiusura relativa di $(A, \mathfrak{m})$. Quindi per il teorema 1.1 *a*) e *b*) l'ideale $\mathfrak{a}B$ è chiuso rispetto alla topologia indotta da A. La *a*) segue allora da [2] (cor. 2 del teor. 1). La *b*) segue subito dal teorema 1.1 *c*).

TEOREMA. 1.3. – *Siano* A *un anello*, $\mathfrak{m}$ *un ideale di* A *e* $(B, \mathfrak{n})$ *la* H–*chiusura di* $(A, \mathfrak{m})$. *Allora* B *è un* A–*modulo piatto*.

Prova. Si ha $(A, \mathfrak{m}) = \varinjlim (A_i, \mathfrak{m}_i)$, dove $\{A_i\}_{i \in I}$ è il sistema induttivo dei sottoanelli finitamente generati di A ed $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m} \cap A_i$ $(i \in I)$. Ne segue $h(A, \mathfrak{m}) = \varinjlim h(A_i, \mathfrak{m}_i)$, e la tesi discende dal corollario precedente.

2. Il teorema 1.1 è una conseguenza immediata dei prossimi teoremi 2.5 e 2.6, i quali permettono di adattare al caso generale alcuni procedimenti usati da Nagata nello studio della chiusura henseliana di un anello locale.

Premettiamo alcune definizioni:

Definizione 2.1. – *Sia* $(A, \mathfrak{m}) \in \mathcal{C}$, *e sia* $f(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + X^n \in A[X]$. *Diremo che* $f(X)$ *è un* N–*polinomio su* $(A, \mathfrak{m})$ *se si ha*: $a_0 \in \mathfrak{m}$ e $(a_1, \mathfrak{m}) = A$.

Sia ora $(A, \mathfrak{m}) \in \mathcal{C}$ con A noetheriano, e sia $(\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}})$ il completamento $\mathfrak{m}$–adico di $(A, \mathfrak{m})$. Sia $f(X)$ un N–polinomio su $(A, \mathfrak{m})$. Per il lemma di Hensel $f(X)$ ha una radice $x \in \hat{\mathfrak{m}}$. Sia $\bar{A}$ l'immagine di A in $\hat{A}$, e poniamo $B = \bar{A}[x]_{1+\hat{\mathfrak{m}} \cap A[x]}$ ed $\mathfrak{n} = \hat{\mathfrak{m}} \cap B$.

Definizione 2.2. – $(B, \mathfrak{n})$ *si dice* N–*estensione semplice di* $(A, \mathfrak{m})$.

Definizione 2.3. – *Una* N–*estensione di* $(A, \mathfrak{m})$ *è una coppia* $(B, \mathfrak{n})$ *ottenuta da* $(A, \mathfrak{m})$ *mediante un numero finito di* N–*estensioni semplici successive*.

Si può dimostrare che ogni N–estensione di $(A, \mathfrak{m})$ è una sottocoppia di $(\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}})$. Ciò dà senso alla seguente

Definizione 2.4. – *La* N–*chiusura di* $(A, \mathfrak{w})$ (*in* $(\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}})$) *è il limite induttivo delle* N–*estensioni di* $(A, \mathfrak{m})$.

THEOREMA 2.5. – *Siano* A *un anello noetheriano*, $\mathfrak{m}$ *un ideale di* A *e* $(B, \mathfrak{n})$ *la* N–*chiusura di* $(A, \mathfrak{m})$. *Si ha allora*:

a) $(B, \mathfrak{n})$ *è una sottocoppia di* $(A, \mathfrak{m})$, $\hat{A}$ *induce in* B *la topologia* $\mathfrak{n}$–*adica e* $(\hat{B}, \hat{\mathfrak{n}}) = (\hat{A}, \hat{\mathfrak{m}})$.

b) *Ogni* N–*polinomio su* $(B, \mathfrak{n})$ *ha una radice in* $\mathfrak{n}$ (*cfr. def. 2.1*).

c) (B , $\mathfrak{n}$) *è un anello di Zariski.*

d) $\hat{A}$ *è fedelmente piatto su* B *e* B *è piatto su* A.

e) *Se* A *è regolare anche* B *è regolare* (*e quindi è somma diretta di un numero finito di domini integralmente chiusi*).

È facile vedere che, con le notazioni precedenti, (B , $\mathfrak{n}$) è una sottocoppia della H–chiusura relativa di (A , $\mathfrak{m}$). Per giungere al teorema 1.1 basta allora dimostrare che se A è regolare, (B , $\mathfrak{n}$) è una H–coppia. Ciò segue subito dalle condizioni b), c), e) del teorema 2.5, e dal seguente teorema 2.6, che è una conseguenza del teorema 6.1 di [1].

TEOREMA 2.6. – *Siano* B *un anello ed* $\mathfrak{n}$ *un ideale di* B *contenuto nel radicale di* B. *Supponiamo che* B *sia somma diretta di un numero finito di domini integralmente chiusi. Allora* (B , $\mathfrak{n}$) *è una* H–*coppia se e solo se ogni* N–*polinomio su* (B , $\mathfrak{n}$) *ha una radice in* $\mathfrak{n}$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] GRECO S., *Qualche condizione di henselianità per anelli non locali*, « Le Matematiche », Catania 1967 (in corso di stampa).

[2] LAFON J. P., *Anneaux henseliens*, « Bull. Soc. Math. de France », *91*, 77–107 (1963).

[3] NAGATA M., *Local rings*, « Interscience Publishers », 1962.