

---

ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI  
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI  
**RENDICONTI**

---

SILVIO CINQUINI

**Sopra l'iperbolicità dei sistemi di equazioni a derivate  
parziali in più variabili indipendenti. Nota II**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,  
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 43 (1967), n.6, p. 464–468.*

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA\\_1967\\_8\\_43\\_6\\_464\\_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_6_464_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

---

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma  
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

*SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

**Analisi matematica.** — *Sopra l'iperbolicità dei sistemi di equazioni a derivate parziali in più variabili indipendenti.* Nota II di SILVIO CINQUINI, presentata (\*) dal Socio G. SANSONE.

RÉSUMÉ. — En nous référant au sommaire de la Note I, dans cette Note II on complète l'étude du cas, où l'équation caractéristique a ses racines réelles et distinctes, et on considère le cas, où cette équation a des racines multiples.

3, b) <sup>(10)</sup> Siano

$$(16) \quad \lambda_{k1}, \lambda_{k2}, \dots, \lambda_{km}$$

le  $m$  radici dell'equazione caratteristica

$$(7) \quad \begin{vmatrix} b_{11k} - \lambda & b_{12k} & \dots & b_{1mk} \\ b_{21k} & b_{22k} - \lambda & \dots & b_{2mk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1k} & b_{m2k} & \dots & b_{mmk} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

le quali, come abbiamo supposto nel presente numero, sono reali e distinte.

Sostituendo nel determinante, che figura al primo membro della (7), al posto di  $\lambda$  una delle radici (16), per esempio  $\lambda_{ki}$ , esso si annulla e ha caratteristica  $m - 1$ ; pertanto esiste, a prescindere da un moltiplicatore, un autovettore, che, per il momento, indichiamo con  $\zeta_1, \dots, \zeta_m$ , soluzione del sistema

$$(17) \quad \begin{cases} \zeta_1 (b_{11k} - \lambda_{ki}) + \dots + \zeta_m b_{1mk} = 0 \\ \dots \\ \zeta_1 b_{m1k} + \dots + \zeta_m (b_{mmk} - \lambda_{ki}) = 0. \end{cases}$$

Al variare di  $i$  otteniamo  $m$  autovettori, che indichiamo rispettivamente con

$$(18) \quad \begin{cases} C_{11}(\dots), C_{12}(\dots), \dots, C_{1m}(\dots); \\ \dots \\ C_{m1}(\dots), C_{m2}(\dots), \dots, C_{mm}(\dots), \end{cases}$$

il cui determinante (ossia il determinante che figura al primo della (10)) è diverso da zero <sup>(11)</sup>, e pertanto si può supporre uguale all'unità in virtù del fatto che ogni autovettore è determinato a meno di un moltiplicatore.

(\*) Nella seduta del 14 novembre 1967.

(10) Anche per quanto si riferisce alle notazioni la presente Nota è la prosecuzione della Nota I, alla quale facciamo riferimento. Vedi questi « Rendiconti », pp. 288-292.

(11) Cfr., per esempio, M. CINQUINI CIBRARIO, *Sopra il problema di Cauchy per i sistemi di equazioni alle derivate parziali del primo ordine*, « Rend. Seminario Matematico della Università di Padova », Anno XVII (1948), pp. 75-96; in particolare § 3, n. 2, pp. 86-7.

c) Ciascuno degli  $m$  autovettori (18) dipende, fino ad avviso contrario, dall'intero positivo  $k$ , che abbiamo ommesso per brevità di scrittura: occorre che tali autovettori siano indipendenti da  $k$ .

A tal uopo, considerata la matrice delle radici (16), che si hanno per  $k = 1, \dots, r$ ,

$$(19) \quad \begin{cases} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \cdots & \lambda_{1m} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \cdots & \lambda_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_{r1} & \lambda_{r2} & \cdots & \lambda_{rm} \end{cases}$$

supponiamo che esista almeno una permutazione degli elementi di ogni singola linea della matrice (19) (permutazione che, naturalmente, può variare al variare della linea), in modo che, indicata con

$$(20) \quad \begin{cases} \lambda_1^{(1)} & \lambda_1^{(2)} & \cdots & \lambda_1^{(m)} \\ \lambda_2^{(1)} & \lambda_2^{(2)} & \cdots & \lambda_2^{(m)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_r^{(1)} & \lambda_r^{(2)} & \cdots & \lambda_r^{(m)} \end{cases}$$

la nuova matrice (ove l'intero  $k$  indica che l'elemento  $\lambda_k^{(j)}$  di (20) appartiene alla linea  $k$ -esima di (19)), abbia caratteristica  $m - 1$  ciascuna delle  $m$  matrici

$$(21) \quad \begin{cases} b_{111} - \lambda_1^{(j)} & b_{121} & \cdots & b_{1m1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m11} & b_{m21} & \cdots & b_{mm1} - \lambda_1^{(j)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{11r} - \lambda_r^{(j)} & b_{12r} & \cdots & b_{1mr} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1r} & b_{m2r} & \cdots & b_{mmr} - \lambda_r^{(j)} \end{cases}$$

che si hanno per  $j = 1, \dots, m$ .

Proviamo che la condizione enunciata è sufficiente per ridurre il sistema (6) alla forma caratteristica (II).

A tal uopo, considerata la  $i$ -esima (ove  $i$  ha uno qualunque dei valori  $1, \dots, m$ ) colonna della matrice (20) e determinato il corrispondente autovettore soluzione del sistema

$$(22) \quad \begin{cases} \xi_1 (b_{11k} - \lambda) + \cdots + \xi_m b_{1mk} = 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_1 b_{m1k} + \cdots + \xi_m (b_{mmk} - \lambda) = 0 \end{cases}$$

nel quale si assume  $k = 1$ , e si sostituisce al posto di  $\lambda$  la radice caratteristica  $\lambda_1^{(i)}$ , per l'ipotesi, che abbiamo fatto, tale autovettore è soluzione anche di ciascuno degli altri  $r - 1$  sistemi (22), che si hanno per  $k = 2, \dots, r$ ,

sostituendo rispettivamente al posto di  $\lambda$  la corrispondente radice  $\lambda_k^{(i)}$ , che figura nella  $i$ -esima colonna della matrice (20), vale a dire (attenendosi alle notazioni (18)), per  $i = 1, \dots, m$ , e qualunque sia l'intero  $k = 1, \dots, r$ , risulta

$$(22') \quad C_{i1} b_{j1k} + C_{i2} b_{j2k} + \dots + C_{im} b_{jmk} = C_{ij} \lambda_k^{(i)}, \quad (j = 1, \dots, m).$$

A questo punto, determinate in modo ovvio le funzioni  $c_{ij}$ , ( $i, j = 1, \dots, m$ ), osservando che, in virtù della (10),  $c_{ij}$  risulta uguale al complemento algebrico dell'elemento  $C_{ij}$  nel determinante che figura al primo membro della (10), moltiplichiamo ambo i membri delle (22') rispettivamente per  $c_{is}$  (ove  $s$  è uno dei numeri  $1, \dots, m$ ) e sommiamo rispetto a  $i$  da 1 a  $m$ ; si ottiene

$$b_{j1k} \sum_{i=1}^m C_{i1} c_{is} + \dots + b_{jmk} \sum_{i=1}^m C_{im} c_{is} = \sum_{i=1}^m C_{ij} c_{is} \lambda_k^{(i)},$$

la quale, tenuta presente la (10), si riduce a

$$b_{jsk} = \sum_{i=1}^m C_{ij} c_{is} \lambda_k^{(i)}, \quad (j, s = 1, \dots, m; k = 1, \dots, r);$$

ossia valgono le (11) con

$$f_{ik} = \lambda_k^{(i)}.$$

È così provato che il sistema (6) può essere posto sotto la forma

$$\frac{\partial z_j}{\partial x} = G_j - \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m C_{ij} c_{is} f_{ik} \frac{\partial z_s}{\partial y_k}, \quad (j = 1, \dots, m).$$

Allora, moltiplicando ambo i membri per  $c_{\mu j}$ , ove  $\mu$  ha uno qualunque dei valori  $1, \dots, m$ , e sommando rispetto a  $j$  da 1 a  $m$ , risulta

$$\sum_{j=1}^m c_{\mu j} \frac{\partial z_j}{\partial x} = \sum_{j=1}^m c_{\mu j} G_j - \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^r \sum_{i=1}^m c_{is} f_{ik} \frac{\partial z_s}{\partial y_k} \sum_{j=1}^m C_{ij} c_{\mu j},$$

ossia

$$\sum_{j=1}^m c_{\mu j} \frac{\partial z_j}{\partial x} = \sum_{j=1}^m c_{\mu j} G_j - \sum_{s=1}^m \sum_{k=1}^r c_{\mu s} f_{\mu k} \frac{\partial z_s}{\partial y_k}, \quad (\mu = 1, \dots, m),$$

vale a dire il sistema (6) è ricondotto alla forma caratteristica (II).

4. RIDUZIONE DI UN SISTEMA ALLA FORMA CARATTERISTICA (II); RADICI REALI MA NON TUTTE DISTINTE. a) Consideriamo ancora il sistema quasi-lineare (6), nel caso in cui *le radici delle  $r$  equazioni (7) sono reali, ma, nell'ipotesi che almeno una di tali equazioni abbia radici multiple, supponiamo che tutti i divisori elementari siano semplici.*

Premesso che possiamo ripetere tutte le considerazioni fatte al n. 3, a), per fissare le idee sia  $\lambda_{ki}$  una radice dell'equazione (7), avente ordine di molte-

plicità  $t$  con  $1 < t \leq m$ . Siccome tutti i divisori elementari sono semplici, il determinante, che figura al primo membro della (7), calcolato per  $\lambda = \lambda_{ki}$ , ha caratteristica  $m - t$ , e pertanto il sistema (17) ammette  $t$  soluzioni linearmente indipendenti. Fermo restando l'intero  $k$ , al variare di  $i$  otteniamo complessivamente  $m$  autovettori (18), il cui determinante risulta ancora diverso da zero <sup>(12)</sup>. Naturalmente, fino ad avviso contrario, gli autovettori (18) dipendono dall'intero  $k$ .

b) A questo punto riprendiamo le considerazioni del n. 3, c), convenendo, innanzi tutto, che, in corrispondenza a ogni  $k$ , nella  $k$ -esima linea della matrice (19) figurino le  $m$  radici dell'equazione (7), nel senso che ogni radice multipla compare tante volte quanto è il proprio ordine di molteplicità.

Ciò premesso, modifichiamo la condizione relativa alla matrice (21), supponendo nel presente numero che ogni singola matrice (21) (che si ha per  $j = 1, \dots, m$ ) abbia rispettivamente caratteristica  $m - t^{(j)}$ , ove  $t^{(j)}$  è il minimo degli ordini di molteplicità delle radici  $\lambda_k^{(j)}$ , ( $k = 1, \dots, r$ ) per la rispettiva equazione (7).

Questa condizione è sufficiente per ridurre il sistema (6) alla forma caratteristica (II).

Infatti basta ripetere le considerazioni del n. 3, c) con qualche variante. Considerata ancora la  $i$ -esima colonna della matrice (20), ove  $i$  è uno qualunque dei numeri  $1, \dots, m$ , sia  $\lambda_k^{(i)}$ , una radice (appartenente alla colonna considerata), il cui ordine di molteplicità per la rispettiva equazione (7), nella quale  $k$  ha il valore  $k'$ , è esattamente uguale a  $t^{(i)}$ . Se è  $t^{(i)} = 1$ , nulla c'è da aggiungere a quanto è stato detto al n. 3, c). Nel caso  $t^{(i)} > 1$  il sistema (22), nel quale si è assunto  $k = k'$  e  $\lambda = \lambda_k^{(i)}$ , fa corrispondere (a questa radice)  $t^{(i)}$  autovettori, i quali, come è stato detto in a), sono linearmente indipendenti. Inoltre, in virtù dell'ipotesi fatta nel presente numero, è evidente che ognuno di questi  $t^{(i)}$  autovettori è soluzione anche di ciascuno degli altri  $r - 1$  sistemi (22), che si hanno assumendo  $k = k''$ , con  $k'' \neq k'$ , e  $\lambda = \lambda_k^{(i)}$ .

Pertanto possiamo concludere, che esistono  $m$  autovettori (18), ciascuno dei quali è indipendente dall'intero positivo  $k$ , e che soddisfano alle (22') come al n. 3, c), e null'altro c'è da aggiungere.

5. OSSERVAZIONI. a) È da rilevare che, se è  $r = 1$  ossia se le variabili indipendenti sono soltanto due, l'ipotesi relativa alle matrici (21) fatta o al n. 3, c) o al n. 4, b) è automaticamente soddisfatta, vale a dire si ritrovano i risultati citati in <sup>(2)</sup>.

b) È evidente che le nostre considerazioni sono valide anche nel caso particolare di Petrowski, in cui la matrice quadrata, che figura al primo membro della (7), ha la forma composta (4), nel senso che esse si possono applicare anche quando una o più matrici componenti, a differenza dall'ipo-

(12) Vedi, per esempio, M. CINQUINI CIBRARIO, *Sopra i sistemi di equazioni alle derivate parziali a caratteristiche reali e multiple*, « Rend. Accademia Nazionale dei Lincei », vol. IV (1948), pp. 682-688; in particolare n. 4, pp. 686-7.

tesi di Petrowski, hanno radici multiple; naturalmente la riduzione alla forma caratteristica (II) si ottiene sotto condizioni più ampie, perché il nostro procedimento, che forma oggetto dei nn. 3 e 4, si applica a ogni singola matrice componente, anziché alla matrice composta.

c) È ovvio che nel caso ancora più particolare, in cui la matrice, che figura al primo membro della (7) è diagonale, il sistema si riduce alla forma (I). Pertanto il caso, in cui la matrice è composta, può essere considerato come una prima generalizzazione di quello dei sistemi del tipo (I).

d) Inoltre si presenta spontanea la domanda, se, nell'eventualità che il sistema (6), iperbolico secondo Petrowski, non si possa ridurre, in base ai nn. 3 e 4, alla forma caratteristica (II), possa essere utile un preliminare cambiamento delle funzioni incognite del tipo

$$u_j(x, y_1, \dots, y_r) = \sum_{i=1}^m h_{ji}(x, y_1, \dots, y_r) z_i(x, y_1, \dots, y_r), \quad (j = 1, \dots, m),$$

ove il determinante delle funzioni  $h_{ji}$ , ( $j, i = 1, \dots, m$ ) è supposto sempre diverso da zero.

Il semplicissimo esempio del n. 7 fornisce una risposta negativa.

e) Si può ancora rilevare che, se per il sistema (6) è soddisfatta la condizione di Petrowski del n. 1, a), ciascuna delle  $r$  equazioni (7) ha  $m$  radici reali e distinte. Infatti, a prescindere dal cambiamento di  $\rho$  in  $-\lambda$ , basta assumere successivamente per  $i = 1, \dots, r$ ,

$$\alpha_i = 1, \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_{i-1} = \alpha_{i+1} = \dots = \alpha_r = 0.$$

D'altra parte, considerato il sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial z_1}{\partial x} = -\frac{\partial z_1}{\partial y_1} - \frac{\partial z_1}{\partial y_2} - a_3 \frac{\partial z_2}{\partial y_1} - a_4 \frac{\partial z_2}{\partial y_2} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} = -b_1 \frac{\partial z_1}{\partial y_1} - b_2 \frac{\partial z_1}{\partial y_2} - \frac{\partial z_2}{\partial y_1} - \frac{\partial z_2}{\partial y_2} \end{cases},$$

ove  $a_3, a_4, b_1, b_2$  sono funzioni note di  $(x, y_1, y_2; z_1, z_2)$  con  $a_3 b_1 > 0$ ,  $a_4 b_2 > 0$ , ciascuna delle due equazioni (7) ha due radici reali e distinte, ma il sistema non è iperbolico secondo Petrowski. Inoltre la condizione, perché il sistema considerato possa esser posto sotto la forma caratteristica (II), è  $a_4 b_1 = a_3 b_2$ .