Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Domenico. Caligo

Moltiplicatori critici λ_{cr}, desunti per via energetica, della pressione p_0 sul manto e dello sforzo assiale totale N_0 in un tubo cilindrico circolare. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **43** (1967), n.6, p. 485–496.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1967_8_43_6_485_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1967.

Meccanica. — *Moltiplicatori critici λ_{cr}, desunti per via energetica, della pressione p_0 sul manto e dello sforzo assiale totale* N_0 *in un tubo cilindrico circolare.* Nota II di DOMENICO CALIGO presentata (*) dal Socio G. KRALL.

SUMMARY. — The author discusses the compatibility equation of critical multipliers λ_{cr}, deduced in Note I (1).

He furnishes coefficient expressions, minima evaluations for calculus of the λ_{cr} and the tables of entire parameters couples (m, n) concurring to the minimum for circular cylindrical tubes of dimensions L (Length), a (Radius), h (Thickness) such that $a/L = 0{,}1\ (0{,}1)\ 0{,}6$; $50\, h/a = 0{,}2\ (0{,}2)\ 1{,}6$.

Abbiamo dedotto nella Nota I (1) l'equazione di compatibilità (I–18), che riportiamo qui per comodità di lettura:

$$(1)\qquad \Gamma_{0,0} + [\Gamma_{1,0}\Phi_1 + \Gamma_{0,1}\Phi_2]\lambda + [\Gamma_{2,0}\Phi_1^2 + \Gamma_{1,1}\Phi_1\Phi_2 + \Gamma_{0,2}\Phi_2^2]\lambda^2 + [\Gamma_{2,1}\Phi_1^2\Phi_2 + \Gamma_{1,2}\Phi_1\Phi_2^2]\lambda^3 = 0 \quad , \quad \Gamma_{h,k} = \sum_{j=0}^{j=3-(h+k)} \Gamma_{h,k}^{(j)} (K^2)^j .$$

Diamo in questa seconda Nota le espressioni dei coefficienti, la discussione della (1) che fornisce, fra l'altro, la (I–23) e la (I–24); le valutazioni dei minimi per ottenere i λ_{cr} e le tabellazioni delle coppie (m, n) di valori dei parametri interi m ed n (cfr. (I–14)) concorrenti al minimo.

1. Le *espressioni dei coefficienti* $\Gamma_{h,k}^{(j)}$ della (1) si valgono delle posizioni (I–10), (I–11), (I–15) e (I–16); in particolare ricordiamo che

$$(2)\qquad m = 1, 3, 5, \cdots \quad ; \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

e che la (I–15), cioè la

$$(3)\qquad \delta_\eta^\gamma \begin{cases} = 1 & , \text{ se } \gamma = \eta , \\ = 0 & , \text{ se } \gamma \neq \eta , \end{cases}$$

permette di trattare simultaneamente i risultati secondo tre differenti deduzioni (cfr. Nota I, n. 3). Si ha:

$$\Gamma_{0,0}^{(0)} = \frac{1-\nu}{2}(1-\nu^2)\mu^4 ,$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{0,0}^{(1)} = \frac{1-\nu}{2} \{(\mu^2+n^2)^4 &- [(2+\nu)\mu^2+n^2][(3-\nu)\mu^2+2n^2]n^2 \\ &+ [2(1+\nu)\mu^2+n^2][(1-\nu)\mu^2+n^2]\} \\ + \frac{(1-\nu)^2}{2}\mu^2\{\delta_\alpha^\gamma[-(2+\nu)\mu^2 n^2 &- n^4 + 2(1+\nu)\mu^2+n^2] \\ &+ \delta_\beta^\gamma[(6+7\nu)\mu^2 n^2 - n^4 - 2(1+\nu)\mu^2+n^2]\} ,\end{aligned}$$

(*) Nella seduta del 14 novembre 1967.

(1) Questi « Rend. », ser. VIII, *28* (novembre 1967). Il rinvio alla formula (n) della Nota I è fatto con (I–n); i riferimenti bibliografici, citati [ ], si trovano al termine della Nota I.

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0,0}^{(2)} = \frac{1-\nu}{2} \{ & \mu^4 [2\mu^2 + (1-\nu) n^2] [\mu^2 + n^2 + \delta_\alpha^\gamma (\mu^2 + \nu n^2)] \\
& + \delta_\beta^\gamma [\mu^4 ((1-\nu)(8+9\nu) n^4 + (1+\nu) \mu^2 n^2 - 2\mu^4) + 4 n^4 (n^2-1)^2] \},
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{0,0}^{(3)} = \delta_\beta^\gamma \frac{1-\nu}{2} \cdot 4 (1-\nu^2) \mu^4 n^4 ;$$

$$\Gamma_{1,0}^{(0)} = -\frac{1-\nu}{2} \{ (n^2-1)(\mu^2+n^2)^2 + \nu\mu^4 + (\delta_\alpha^\gamma + \delta_\beta^\gamma) \mu^2 (\nu\mu^2 - n^2) \},$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,0}^{(1)} = \frac{1-\nu}{2} \Big\{ & -\frac{1+\nu}{1-\nu} \mu^2 n^2 (\mu^2+n^2)^2 + \left[\nu \frac{5-\nu}{1-\nu} \mu^4 - \frac{2-5\nu+\nu^2}{1-\nu} \mu^2 n^2 - n^4 \right] n^2 \\
& + 2(1-\nu)\mu^4 + (3-\nu)\mu^2 n^2 + n^4 \Big\} \\
& + \delta_\alpha^\gamma \Big\{ (\mu^2+n^2)^2 (\nu\mu^2 - n^2) n^2 + \left[\nu \frac{1-\nu}{2} \mu^4 + \frac{8-3\nu-\nu^2}{2} \mu^2 n^2 + 2 n^4 \right] n^2 \\
& + (1-\nu)(1-3\nu)\mu^4 - \frac{3-\nu^2}{2} \mu^2 n^2 - n^4 \Big\} \\
& + \delta_\beta^\gamma \Big\{ (\mu^2+n^2)^2 (\nu\mu^2 - n^2) n^2 + \left[(4-7\nu) \frac{1-\nu}{2} \mu^4 + \frac{8-3\nu-\nu^2}{2} \mu^2 n^2 + 2\nu n^4 \right] n^2 \\
& - (1-\nu)^2 \mu^4 + \frac{1-4\nu+\nu^4}{2} \mu^2 n^2 + (1-2\nu) n^4 \Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,0}^{(2)} = -(1-\nu) n^2 \{ & \delta_\alpha^\gamma \mu^4 [2\mu^2 + (1+\nu) n^2] \\
& + \delta_\beta^\gamma n^2 [(1+\nu)\mu^4 + 2\mu^2 n^2 - 4\mu^2 + 2(n^2-1)] \};
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{0,1}^{(0)} = -\frac{1-\nu}{2} \mu^2 \{ (\mu^2+n^2)^2 + 2(1+\nu)\mu^2 + n^2 \},$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0,1}^{(1)} = -\frac{1-\nu}{2} \mu^2 \Big\{ & \left[\frac{2}{1-\nu} \mu^2 + n^2 \right] \left[(\mu^2+n^2)^2 + (1-\nu)\mu^2 + n^2 \right] \\
& + \delta_\alpha^\gamma \cdot (1-\nu) \mu^2 \left[\frac{2}{1-\nu} \mu^2 + n^2 \right] + \delta_\beta^\gamma \left[-2\mu^4 + (1+7\nu)\mu^2 n^2 + 4 n^2 (n^2+1) \right] \Big\},
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{0,1}^{(2)} = -\delta_\beta^\gamma \cdot 2(1-\nu) \mu^2 n^2 \{ \mu^4 + 2\nu\mu^2 n^2 + n^2 (n^2+1) \};$$

$$\Gamma_{2,0}^{(0)} = \frac{1+\nu}{2} \mu^2 n^2 (n^2-1) - (\delta_\alpha^\gamma + \delta_\beta^\gamma) \Big\{ n^4 (\nu\mu^2 - n^2) + \frac{1-\nu}{2} \mu^4 + (1-\nu)\mu^2 n^2 + n^4 \Big\},$$

$$\Gamma_{2,0}^{(1)} = \{ \delta_\alpha^\gamma [2(1-\nu)\mu^2 + n^2] + \delta_\beta^\gamma n^2 \} \{ n^2 (n^2-1) - \mu^2 \};$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,1}^{(0)} = \mu^2 \Big\{ & \frac{3+\nu}{2} \mu^2 n^2 - (1-\nu)\mu^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 (n^2-1) \\
& - (\delta_\alpha^\gamma + \delta_\beta^\gamma) [\nu\mu^2 (n^2-1) - n^2 (n^2+1)] \Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{1,1}^{(1)} = \mu^2 n^2 \{ & \delta_\alpha^\gamma [(\mu^2+n^2)^2 + 2(1-\nu)\mu^2 + n^2] \\
& + \delta_\beta^\gamma [(\mu^2+n^2)^2 - 4(1-\nu)\mu^2 + (3-2\nu) n^2 - 2(1-\nu)] \};
\end{aligned}$$

$$\Gamma_{0,2}^{(0)} = \mu^4 \left(\mu^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) , \quad \Gamma_{0,2}^{(1)} = \delta_\beta^\gamma \cdot 2(1-\nu) \mu^4 n^2 ;$$

$$\Gamma_{2,1}^{(0)} = (\delta_\alpha^\gamma + \delta_\beta^\gamma) \mu^2 [\mu^2 - n^2 (n^2-1)] , \quad \Gamma_{1,2}^{(0)} = -(\delta_\alpha^\gamma + \delta_\beta^\gamma) \mu^4 n^2 .$$

2. *a*) Se $n \geq 2$, $\mu = m\pi\, a/L > 0$ i coefficienti

$$(4) \qquad \Gamma_{0,0}^{(0)}, \Gamma_{0,0}^{(1)}, \Gamma_{0,0}^{(2)}, \Gamma_{0,0}^{(3)}\ ^{(2)}\ ;\quad \Gamma_{1,1}^{(0)}, \Gamma_{1,1}^{(1)}\ ^{(3)}\ ;\quad \Gamma_{0,2}^{(0)}, \Gamma_{0,2}^{(1)}\ ^{(2)}$$

sono positivi; invece i coefficienti

$$(5) \qquad \Gamma_{1,0}^{(0)}, \Gamma_{1,0}^{(1)}, \Gamma_{1,0}^{(2)}\ ^{(3)}\ ;\quad \Gamma_{0,1}^{(0)}, \Gamma_{0,1}^{(1)}, \Gamma_{0,1}^{(2)}\ ^{(2)}\ ;\quad \Gamma_{1,2}^{(0)}\ ^{(3)}$$

sono negativi. I (4) e gli opposti dei (5) crescono al crescere sia di n che di μ. Per gli altri tre coefficienti risulta:

$$(6) \qquad \Gamma_{2,0}^{(0)}, \Gamma_{2,0}^{(1)} \text{ e } -\Gamma_{2,1}^{(0)} \text{ sono} \begin{cases} > 0, \text{ purché, se } \delta_\alpha^\gamma + \delta_\beta^\gamma = 1, \text{ sia } 0 < \mu^2 < n^2(n^2-1) \\ = 0, \text{ se } \delta_\alpha^\gamma + \delta_\beta^\gamma = 1 \text{ e } 0 < \mu^2 = n^2(n^2-1); \\ < 0, \text{ se } \delta_\alpha^\gamma + \delta_\beta^\gamma = 1 \text{ e } \mu^2 > n^2(n^2-1)\,[\geq 12]. \end{cases}$$

Le valutazioni per $n = 1$, qui ed in seguito, possono essere fatte direttamente, senza che occorra riportarle.

b) Dalle (4), (5), (6), se è $\Phi_1 \geq 0$, $\Phi_2 \geq 0$, $\Phi_1 + \Phi_2 > 0$, si deduce che

$$(7)' \qquad \Gamma_{0,0} > 0 \quad , \quad \Gamma_{1,0}\,\Phi_1 + \Gamma_{0,1}\,\Phi_2 < 0;$$

$$(7)'' \qquad \Gamma_{2,1}\,\Phi_1^2 + \Gamma_{11}\,\Phi_1\,\Phi_2 + \Gamma_{0,2}\,\Phi_2^2 > 0 \quad , \quad \Gamma_{21}\,\Phi_1^2\,\Phi_2 + \Gamma_{12}\,\Phi_1\,\Phi_2^2 \leq 0.$$

Per la validità delle (7)″ si tenga presente la (6).

c) Ricorriamo alla (I–21) $N = 1 + (n/\mu)^2$ per enunciare le seguenti limitazioni, valide per $n \geq 2$, $\mu > 0$:

$$\begin{aligned} &[7\,\delta_\beta^\gamma - (2 + \delta_\alpha^\gamma)]\,(1-\nu^2)\,\mu^4\,(n^2-1) < \\ &\quad < \frac{2}{1-\nu}\,\Gamma_{0,0}^{(1)} - \mu^4\,N\,\{\mu^4\,(3\,N - 2) + N\,(n^2-1)^2 \\ &\quad + (n^2-1)\,[2\,(n^2-1) + (1-\nu)\,(1 - \delta_\alpha^\gamma - \delta_\beta^\gamma)]\} < \\ &\quad < [7\,\delta_\beta^\gamma\,n^2 - (1 + \delta_\alpha^\gamma)\,(n^2-1)]\,(1-\nu^2)\,\mu^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\left[1 - \frac{N-1}{N^2}\,\frac{1}{n^2-1}\,(\delta_\alpha^\gamma + \delta_\beta^\gamma)\right]\mu^4\,(n^2-1)\,N^2 < -\frac{2}{1-\nu}\,\Gamma_{1,0}^{(0)} < \\ &\quad < \left[1 + \frac{\nu}{N^2}\,\frac{1}{n^2-1}\,(1 + \delta_\alpha^\gamma + \delta_\beta^\gamma)\right]\mu^4\,(n^2-1)\,N^2, \end{aligned}$$

$$\left[n^2 + 1 - \frac{1}{N}\right]\mu^4\,\frac{N^2}{N-1} < -\frac{2}{1-\nu}\,\Gamma_{0,1}^{(0)} < [n^2 + 1 + 2\,\nu]\,\mu^4\,\frac{N^2}{N-1}\ ^{(4)}.$$

(2) Nullo se $\delta_\beta^\gamma = 0$.

(3) Nullo se $\delta_\alpha^\gamma + \delta_\beta^\gamma = 0$.

(4) I risultati di questo n. 2 si stabiliscono agevolmente ordinando rispetto a μ^2 le espressioni dei $\Gamma_{h,k}^{(j)}$, date nel n. 1.

3. *a*) La limitazione (I–20) di K^2 e l'ordine di grandezza dei diversi $\Gamma^{(j)}_{h,k}$ e di Φ_1 e Φ_2 giustificano l'adozione di forme ridotte dell'equazione (1) con l'abbandono dei termini contenenti $K^{2j}\,\Phi_1^h\,\Phi_2^k$ per i quali sia $j+h+k\geq 2$. (Cfr. [3]: (211); [9]: pp. 465 (11–8), 478 (11–12) e 496 (*d*)).

Così faremo; ma vogliamo prima osservare che una parte della (1) è invariante rispetto ai riferimenti considerati ($\gamma=\alpha$, $\gamma=\beta$, oppure $\gamma\neq\alpha$ e $\neq\beta$).

Essa è

$$\Gamma^{(0)}_{0,2}\,\Phi_2^2\,\lambda^2+\Gamma^{(0)}_{0,1}\,\Phi_2\,\lambda+\Gamma^{(0)}_{0,0}=0, \tag{8}$$

come si constata dalle espressioni riportate al n. 1, dalle quali si ha pure che la (8) ha due variazioni di segno e che

$$0<4\frac{\Gamma^{(0)}_{0,0}\cdot\Gamma^{(0)}_{0,2}}{(\Gamma^{(0)}_{0,1})^2}<1.$$

La minore delle due radici positive di (8) ha il valore per difetto

$$\lambda\Phi_2=-\frac{\Gamma^{(0)}_{0,0}}{\Gamma^{(0)}_{0,1}}>(1-\nu^2)\,\frac{1}{n^2+1+2\nu}\,\frac{N-1}{N^2}$$

e si può assumere

$$\lambda_{cr}\,\frac{N_0}{2\,\pi a}=Eh\cdot\min_{\substack{n=2,3,\ldots\\ m=1,3,\ldots}}\left\{\frac{1}{n^2+1+2\nu}\,\frac{N-1}{N^2}\right\}. \tag{9}$$

Il risultato ha scarso interesse perché questo $\lambda\Phi_2$ non dipende dallo spessore h, come era ovvio dalla (8); tuttavia la (9) concorda bene con la prossima (12).

Questo caso particolare pone in luce il significato della presenza dei termini in $K^2=\frac{1}{12}\left(\frac{h}{a}\right)^2$ per ottenere risultati dipendenti dai rapporti a/L ed h/a.

b) Nelle ipotesi sotto le quali valgono le (7)′ e (7)″ il primo membro della (1) è positivo per $\lambda\leq 0$. Tenuti presenti i segni dei coefficienti si può concludere che la (1) ha almeno una radice reale positiva e nessuna radice negativa o nulla.

Non ci fermiamo ulteriormente su queste considerazioni, perché ci occuperemo di qui in avanti della forma ridotta (10) della (1).

4. *a*) Con le riduzioni giustificate all'inizio del n. 3 l'equazione (1) diviene

$$[\Gamma^{(0)}_{1,0}\,\Phi_1+\Gamma^{(0)}_{0,1}\,\Phi_2]\,\lambda+\Gamma^{(0)}_{0,0}+K^2\,\Gamma^{(1)}_{0,0}=0 \tag{10}$$

(cfr. [3] (211), [9], p. 496). Le proprietà dei $\Gamma^{(j)}_{h,k}$ annotate nel n. 2 permettono di discutere la (10) nel modo seguente.

Nel piano Φ_1, Φ_2 la (10) è l'equazione di una retta per ogni *fissata* quaterna ν, K^2, μ, $n \geq 2$, con il coefficiente angolare $t = -\Gamma^{(0)}_{1,0}/\Gamma^{(0)}_{0,1} < 0$ [5].

Per $\Phi_1 = 0$ si ottiene

$$\lambda\Phi_2 = -[\Gamma^{(0)}_{0,0} + K^2\,\Gamma^{(1)}_{0,0}]/\Gamma^{(0)}_{0,1} > 0;$$

ma è

$$-\frac{\Gamma^{(0)}_{0,0} + K^2\,\Gamma^{(1)}_{0,0}}{\Gamma^{(0)}_{0,1}} > \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1 + 2\nu}\,(N - 1)\,\Phi^0$$

ove si è posto, conforme alla (I–22):

$$\text{(11)} \qquad \Phi^0 = \frac{1 - \nu^2}{(n^2 - 1)\,N^2} + \frac{1}{12}\left(\frac{h}{a}\right)^2 \left\{ n^2 - 1 + \frac{2\,(n^2 - 1) + (1 - \nu)\,(1 - \delta^\gamma_\alpha - \delta^\gamma_\beta)}{N} + \frac{7\,(1 - \nu^2)\,\delta^\gamma_\beta - (2 + \delta^\gamma_\alpha)}{N^2} + \frac{\mu^4}{n^2 - 1}\left(3 - \frac{2}{N}\right) \right\} \text{[6]}.$$

Si può pertanto assumere

$$\text{(12)} \qquad \lambda_{cr}\,\Phi_2 = \min_{\substack{n = 2, 3, \ldots \\ m = 1, 3, \ldots}} \left[\frac{n^2 - 1}{n^2 + 1 + 2\nu}\,(N - 1)\,\Phi^0\right],$$

fissato il valore di ν e per ogni coppia di valori dei rapporti h/a, a/L.

Per $\Phi_2 = 0$ si ottiene dalla (10)

$$\lambda\Phi_1 = -[\Gamma^{(0)}_{0,0} + K^2\,\Gamma^{(1)}_{0,0}]/\Gamma^{(0)}_{1,0} > 0;$$

ma è

$$-\frac{\Gamma^{(0)}_{0,0} + K^2\,\Gamma^{(1)}_{0,0}}{\Gamma^{(0)}_{1,0}} > \frac{1}{1 + \dfrac{\nu}{N^2}\,\dfrac{1 + \delta^\gamma_\alpha + \delta^\gamma_\beta}{n^2 - 1}}\,\Phi^0,$$

(5) Si constata che t soddisfa la limitazione

$$(N - 1)\,(n^2 - 1)\,\frac{1}{n^2 + 1 + 2\nu}\left[1 - \frac{N - 1}{N^2}\,\frac{1}{n^2 - 1}\,(\delta^\gamma_\alpha + \delta^\gamma_\beta)\right] <$$

$$< -t < N\,(n^2 - 1)\,\frac{1}{n^2 + 1 + \mu^2}\left[1 + \frac{\nu}{N^2}\,\frac{1}{n^2 - 1}\,(1 + \delta^\gamma_\alpha + \delta^\gamma_\beta)\right].$$

(6) Si dovranno tenere presenti le (I–16), (I–21), (2) e (3); nonché le definizioni (I–11) di Φ_1 e Φ_2. Da (11) e da (I–21) segue

$$(a) \qquad (n^2 - 1)\,\Phi^0 = (1 - \nu^2)\,\frac{\mu^4}{(\mu^2 + n^2)^2} + K^2 \left\{ (\mu^2 + n^2)^2 - (2\,n^2 - 1)\,\frac{n^2 + 3\,\mu^2}{n^2 + \mu^2} + (1 - \nu)\,(1 - \delta^\gamma_\alpha - \delta^\gamma_\beta)\,\mu^2\,\frac{n^2 - 1}{n^2 + \mu^2} + \left[7\,(1 - \nu^2)\,\delta^\gamma_\beta - (2 + \delta^\gamma_\alpha)\right]\mu^4\,\frac{n^2 - 1}{(\mu^2 + n^2)^2} \right\}.$$

con Φ^0 data dalla (11). Pertanto si può assumere

$$\lambda_{cr}\,\Phi_1 = \min_{\substack{n=2,3,\cdots \\ m=1,3,\cdots}} \left[\frac{1}{1+\dfrac{\nu}{N^2}\,\dfrac{1+\delta^{\gamma}_{\alpha}+\delta^{\gamma}_{\beta}}{n^2-1}}\,\Phi^0 \right] \tag{13}$$

fissato il valore di ν e per ogni coppia di valori di h/a , a/L.

Dalla (12) e dalla (13) si deducono immediatamente la (I–23) e la (I–24), rispettivamente.

b) Fissati ν , h/a (e perciò K^2) ed a/L il minimo (13) si consegua per $(m\,,\,n) = (m_1\,,\,n_1)$; indicheremo con Φ_1^0 il suo valore; analogamente indicheremo con Φ_2^0 il valore del minimo (12) e con $(m_2\,,\,n_2)$ la coppia $(m\,,\,n)$ minimante. Ossia

$$\begin{cases} \Phi_1^0 = \lambda_{cr}\,\Phi_1\,, & \text{con} \quad (m\,,\,n) = (m_1\,,\,n_1) \quad , \quad \Phi_2 = 0\,; \\ \Phi_2^0 = \lambda_{cr}\,\Phi_2\,, & \text{con} \quad (m\,,\,n) = (m_2\,,\,n_2) \quad , \quad \Phi_1 = 0\,. \end{cases} \tag{14}$$

Sia r_1 la retta (10) uscente da $(\Phi_1^0\,,\,0)$; sia r_2 la retta (10) uscente da $(0\,,\,\Phi_2^0)$. In generale $r_1 \neq r_2$ perché $(m_1\,,\,n_1) \neq (m_2\,,\,n_2)$; si vedano le tabelle I e II.

TABELLA I.

Valori n_1 di n che, in assenza di sforzo assiale, forniscono p_{cr} (7).

a/L \ $50\,h/a$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
0,1	4	3	3	3	3	2	2	2
0,2	5	4	4	4	3	3	3	3
0,3	6	5	5	4	4	4	4	4
0,4	7	6	5	5	5	4	4	4
0,5	8	6	6	5	5	5	5	5
0,6	8	7	6	6	6	5	5	5

Se r_1 ed r_2 coincidono, ogni punto del segmento staccato su di esse dai semiassi positivi Φ_1 e Φ_2 ha coordinate tali che

$$\lambda\Phi_1 = \lambda_{cr}\,\Phi_1 \quad , \quad \lambda\Phi_2 = \lambda_{cr}\,\Phi_2\,, \tag{15}$$

forniscono il moltiplicatore critico e il valore critico di p_0 e di $N_0/2\pi a$ nel caso che siano presenti entrambi (beninteso, con i prefissati h/a ed a/L).

(7) Cfr. (I–24) e (13); risulta $m_1 = 1$. Per $a/L = 0$ è $m_1 = 1$, $n_1 = 2$.

Se $r_1 \neq r_2$, le due rette si intersecano in un punto (Φ'_1, Φ'_2) del primo quadrante.

Fissiamo $\lambda\Phi_1 = \lambda\Phi'_1$ e ricaviamo dalla (10) $\lambda\Phi_2$ in funzione di (m, n) variabili; calcoliamo il minimo.

Se $\min\limits_{\substack{n=2,3,\dots \\ m=1,3,\dots}} \lambda\Phi_2 = \lambda\Phi'_2$,

questo minimo si consegue sia per $(m, n) = (m_2, n_2)$ che per $(m, n) = (m_1, n_1)$ e la spezzata con i vertici in $(0, \Phi_2^0)$, (Φ'_1, Φ'_2), $(\Phi_1^0, 0)$ ha le coordinate dei suoi punti verificanti le (15) con i predetti valori di (m, n) rispettivamente sul primo e sul secondo lato.

Se $\min\limits_{\substack{n=2,3,\dots \\ m=1,3,\dots}} \lambda\Phi_2 < \lambda\Phi'_2$, si calcola la (m^*, n^*) minimante e si determina, con la (10), la retta r^* corrispondente a ν, h/a, a/L, m^*, n^* (noti); la r^* interseca nel primo quadrante sia r_1 che r_2.

TABELLA II.

Valori m_2 *di* m *che, in assenza di pressione sul manto, forniscono* N_{cr} (8).

a/L \ $50\,h/a$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
0,1	93	65	53	*1*	*1*	*1*	*1*	*1*
0,2	47	33	27	23	21	19	17	15
0,3	31	21	17	15	13	13	11	11
0,4	23	17	13	11	11	9	9	7
0,5	19	13	11	9	9	7	7	7
0,6	15	11	9	7	7	7	5	5

Questo procedimento, eventualmente iterato, conduce alla costruzione di una spezzata s; le coordinate (Φ_1, Φ_2) di ogni punto della s verificano le (15) con i valori di m e di n spettanti al lato di s a cui il punto appartiene (cfr. [3], cap. IX, n. 2 b).

In altre parole: fissati ν, h/a, a/L, ad ogni Φ_1 dell'intervallo $(0, \Phi_1^0)$ corrisponde sulla s una ordinata Φ_2 tale che le (15) forniscono i valori critici di λ e di $N_0/2\pi a$ in presenza della pressione sul manto $p_0 = \frac{E}{1-\nu^2}\frac{h}{a}\Phi_1$.

c) Lasciando fisso ν e variando i rapporti h/a, a/L il procedimento consente la costruzione delle corrispondenti spezzate s. La retta

$$\Phi_2 = \Phi^* \Phi_1 \tag{16}$$

(8) Cfr. (I–23) e (12); risulta $n_1 = 2$.

interseca ciascuna di queste spezzate in punti, le coordinate dei quali determinano i valori critici di Φ_1 e di Φ_2 con rapporto Φ^* costante. Si ricava $\lambda\Phi_1 = -[\Gamma^{(0)}_{0,0} + K^2\,\Gamma^{(1)}_{0,0}]/[\Gamma^{(0)}_{1,0} + \Phi^*\,\Gamma^{(0)}_{0,1}]$. Da questa, tenute presenti le limitazioni formulate al n. 2 *c*, seguono

$$\lambda_{cr}\,\Phi_1 = \min_{\substack{n=2,3,\cdots\\ m=1,3,\cdots}} \left[\frac{(n^2-1)\,\Phi^0}{n^2+\Phi^*\,\mu^2}\right] \quad , \quad \lambda_{cr}\,\Phi_2 = \Phi^*\cdot\lambda_{cr}\,\Phi_1 \ ^{(9)}, \tag{17}$$

ed anche

$$\lambda_{cr}\,p_0 = p_{cr} = \frac{E}{1-\nu^2}\,\frac{h}{a}\cdot\lambda_{cr}\,\Phi_1 \quad , \quad \lambda_{cr}\,N_0 = N_{cr} = 2\,\Phi^*\cdot\pi a^2\,p_{cr}\,. \tag{18}$$

Se $\Phi^* = 1/2$ (ved. (4) di Nota I) i minimi (17) si ottengono con $m = m^* = 1$ ed $n = n^*$ riportato sulla Tabella III.

TABELLA III.

Valori n^* *di* n *che forniscono* $N_{cr} = \pi a^2\,p_{cr}$ (10).

a/L \ $50\,h/a$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
0,1	4	3	3	3	2	2	2	2
0,2	5	4	4	4	3	3	3	3
0,3	6	5	5	4	4	4	4	4
0,4	7	6	5	5	5	4	4	4
0,5	8	6	6	5	5	5	5	4
0,6	8	7	6	6	5	5	5	5

La prima delle (18), con $\delta^\gamma_\alpha = \delta^\gamma_\beta = 0$, $m = 1$, $\Phi^* = 1/2$, corrisponde alla (11–25) di [9]. Ma, ricordando la (I–16) e la (*a*) di nota (6), si vede subito

(9) Più precisamente con le posizioni $\varphi^* = (1+2\nu)\,\Phi^*$, $\delta = \delta^\gamma_\alpha + \delta^\gamma_\beta$, risulta:

$$-\frac{\Gamma^{(0)}_{0,0} + K^2\Gamma^{(1)}_{0,0}}{\Gamma^{(0)}_{1,0} + \Phi^*\,\Gamma^{(0)}_{0,1}} > \frac{(n^2-1)\,\Phi^0}{n^2+\Phi^*\,\mu^2 - 1 + \nu\,\dfrac{1+\delta}{N^2} + \left(\dfrac{\mu}{n}\right)^2\varphi^*}\ ; \tag{b}$$

è sufficiente che sia

$$(n/\mu)^2 \geq \varphi^* + (1+\delta)\,\nu/4 \tag{c}$$

per ottenere $n^2 + \Phi^*\,\mu^2 - 1 + \nu\,(1+\delta)\,/\,N^2 + (\mu/n)^2\,\varphi^* \leq n^2 + \Phi^*\,\mu^2$. Infatti questa limitazione è soddisfatta se $f(\xi) \equiv \xi^3 + (2-\varphi^*)\,\xi^2 + [1-(1+\delta)\,\nu - 2\,\varphi^*]\,\xi - \varphi^* \geq 0$; ma per $\xi \geq \varphi^* + (1+\delta)\,\nu/4$, la $f(\xi)$ è crescente; perciò $f(\xi) \geq f(\varphi^* + (1+\delta)\,\nu/4) = (1+\delta)\,\nu/4\cdot[\varphi^* + (1+\delta)\cdot\nu/4 - 1]^2 \geq 0$. Per esempio con $\Phi^* = 1/2$, $\nu = 1/6$, segue da (*c*) : $(n/\mu)^2 \geq (17+\delta)/24$.

(10) Cfr. (I–25) e (17) per $\Phi^* = 1/2$; risulta $m^* = 1$. Per $a/L = 0$ è $m^* = 1$, $n^* = 2$.

che la nostra (18) fornisce

$$(19)_1 \qquad p_{cr} = \frac{Eh}{a} \cdot \min_{n=2,3,\cdots} \frac{1}{n^2 + \frac{1}{2}\left(\pi \frac{a}{L}\right)^2} \left\{ \frac{1}{\left[n^2 \left(\frac{L}{\pi a}\right)^2 + 1\right]^2} \right.$$

$$\left. + \frac{h^2}{12\, a^2 (1 - \nu^2)} \left[\left(n^2 + \left(\frac{\pi a}{L}\right)^2\right)^2 - (2\, n^2 - 1) \frac{n^2 \left(\frac{L}{\pi a}\right)^2 + 3}{n^2 \left(\frac{L}{\pi a}\right)^2 + 1} + \cdots \right] \right\};$$

5. Per il calcolo dei minimi (12), (13) e (17) giova osservare quanto segue, ricordando le posizioni (14) per economia di scrittura.

a) $\lim\limits_{L\to+\infty} \Phi_1^0 = (n^2 - 1)\, K^2 \geq 3\, K^2 \;;\; \lim\limits_{\mu\to+\infty} \Phi_1^0 = +\infty \;,\; \lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_1^0 = +\infty;$

$\Phi_1^0\big|_{n=2}$ = quantità finita > 0, qualunque sia μ finito.

b) $\lim\limits_{L\to+\infty} \Phi_2^0 = +\infty \;;\; \lim\limits_{\mu\to+\infty} \Phi_2^0 = +\infty \;,\; \lim\limits_{n\to+\infty} \Phi_2^0 = +\infty;$

$\Phi_2^0\big|_{n=2}$ = quantità finita > 0, qualunque sia μ finito.

c) Sia k_1 un numero positivo fissato opportunamente; si può, per esempio assumere $k_1 = [\lambda\Phi_1]_{\substack{m=1\\n=2}}$ dopo avere scelto ν, a/L, h/a. Basta che siano

$$(20) \qquad m \text{ ed } n \text{ tali che } \frac{3}{3 + 2\nu} K^2 \frac{\mu^4 + (n^2 - 1)(n^2 - 4)}{n^2 - 1} > k_1$$

perché l'espressione da rendere minima in (13) superi k_1. Pertanto il minimo (13) esiste e si può cercare nell'insieme finito di valori di n intero ≥ 2 e di m dispari che *non* verificano la (20).

d) Sia k_2 un numero positivo fissato opportunamente; per esempio, scelti ν, a/L, h/a, sia $k_2 = [\lambda\Phi_2]_{\substack{m=1\\n=2}}$. Basta che siano

$$(21) \qquad m \text{ ed } n \text{ tali che } \frac{2}{3} K^2 \frac{\mu^4 + (n^2 - 1)(n^2 - 4)}{\mu^2} > k_2$$

perché risulti $\frac{(n^2 - 1)(N - 1)}{n^2 + 1 + 2\nu} \Phi^0 > k_2$. Pertanto il minimo (12) esiste.

6. *a*) Poiché $\lim\limits_{\mu\to 0} N = +\infty$, nei casi in cui μ è molto piccolo rispetto ad n ($\mu/n \ll 1$) come, ad esempio, se il tubo è molto lungo rispetto al raggio, nella (13) si possono trascurare i termini che hanno N al denominatore e dedurre

$$(22) \qquad \lambda_{cr}\, p_0 = p_{cr} = \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{h}{a} K^2 \cdot \min (n^2 - 1) = \frac{E\, h^3}{12\,(1 - \nu^2)} \frac{3}{a^3}$$

conforme al caso critico di Eulero (cfr. [4], p. 69 (27) e [9], p. 478 (11-12)).

b) Se μ è molto grande rispetto ad n ($n/\mu \ll 1$) dalla (12), tenuto conto della (*a*) di nota [6], si deduce

$$(19)_m \qquad \frac{(n^2-1)\,\Phi^0}{n^2+1+2\nu}\,(N-1) =$$

$$\frac{n^2/\mu^2}{n^2+1+2\nu}\left\{\frac{(1-\nu^2)\,\mu^4}{(\mu^2+n^2)^2}+K^2\left[(\mu^2+n^2)^2-(2n^2-1)\,\frac{(n/\mu)^2+3}{(n/\mu)^2+1}+\cdots\right]\right\}.$$

Nella $(19)_m$ si possono trascurare l'ultimo termine scritto e quelli tralasciati; si ottiene così

$$\Phi_2^0 = \lambda_{cr}\,\Phi_2 \simeq \min_{\substack{n=2,3\cdots\\ m=1,3\cdots}}\left[(1-\nu^2)\,\frac{\mu^2}{(\mu^2+n^2)^2}+K^2\,\frac{(\mu^2+n^2)^2}{\mu^2}\right].$$

Si ritrova cioè la (11–8) di [9], ivi discussa a p. 465, per concludere che

$$(23) \qquad \lambda_{cr}\,\Phi_2 = 2\sqrt{K^2(1-\nu^2)}\,,\quad (\mu^2+n^2)^2/\mu^2=\sqrt{(1-\nu^2)/K^2}\,,\quad n/\mu \ll 1.$$

c) Col ricorso alla limitazione (*b*) data in nota [9] e con la (11), si ottiene dalla (17):

$$(24) \qquad \lim_{\mu\to 0}\lambda_{cr}\,\Phi_1 = \min_{\substack{n=2,3\cdots\\ m=1,3\cdots}}\left[\frac{(n^2-1)\,\Phi^0}{n^2-1}\right] = K^2\min(n^2-1) = 3\,K^2$$

ossia $p_{cr} = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\,\dfrac{3}{a^3}$, come in (22). Questo risultato conferma che il carico critico p_{cr} per un tubo di lunghezza indefinita rimane quello di Eulero, mentre lo sforzo assiale risulta, per la (18), $N_{cr} = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\,\dfrac{6\pi}{a}\,\Phi^*$.

La citata (11–25) di [9] dà invece $\lim\limits_{\mu\to 0} p_{cr} = \dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}\,\dfrac{4}{a^3}$, per effetto dei termini tralasciati.

7. *a*) Si riportano alcune tabellazioni degli $(m\,,\,n)$ concorrenti al minimo per i carichi considerati in questa ricerca.

Per agevolare i confronti si sono adottati valori dei parametri a/L , h/a considerati anche da Von Mises [8], Föppl («Drang und Zwang», p. 373) e Krall [4]. *Si è posto* $\nu = 1/6$.

I calcoli sono stati eseguiti sul CINAC grazie alla collaborazione del prof. A. Ghizzetti, direttore dell'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo; il programma è stato elaborato dal dott. Giuseppe Jacopini e dalla dott.ssa Lucia Passerini Mirri.

Le Tabelle I, II e III, sono invarianti rispetto ai tre riferimenti citati al n. 3 di Nota I; le diverse espressioni del potenziale elastico I–$(5)_\alpha$ o I–$(5)_\beta$ non influiscono perciò sui valori $(m\,,\,n)$ minimanti, almeno per i tubi qui considerati.

Dal confronto con la tabella di von Mises (cfr. [4], p. 70) si rileva che essa coincide con la Tabella III.

Lievi differenze si riscontrano, nel passaggio da un riferimento ad un altro, nelle tabelle di p_{cr} e di N_{cr}, ma tali differenze sono inferiori al quattro per mille.

TABELLA IV.

$$10^4\, \Phi_1^0 \qquad \left(p_{cr} = \frac{E}{1-\nu^2}\,\frac{h}{a}\,\Phi_1^0\,,\ N_0 = 0\right).$$

a/L \ $50\,h/a$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
0	0,04	0,16	0,36	0,64	1,00	1,44	1,96	2,56
0,1	0,23	0,58	1,12	1,89	2,87	3,39	3,94	4,57
0,2	0,43	1,22	2,27	3,74	5,05	6,33	7,84	9,59
0,3	0,65	1,85	3,57	5,36	7,37	9,82	12,72	16,06
0,4	0,88	2,52	4,69	7,22	10,48	13,93	17,08	20,71
0,5	1,12	3,27	5,94	9,46	12,94	17,19	22,21	28,01
0,6	1,36	3,87	7,31	11,26	16,33	21,33	26,76	33,04

TABELLA V.

$$10^4\, \Phi_2^0 \qquad \left(N_{cr} = 2\,\pi a h\,\frac{E}{1-\nu^2}\,\Phi_2^0\,,\ p_0 = 0\right).$$

a/L \ $50\,h/a$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
0,1	17,08	34,15	51,23	*58,17*	*66,79*	*77,33*	*89,79*	*104,16*
0,2	17,09	34,16	51,26	68,30	85,53	102,56	119,42	137,04
0,3	17,08	34,23	51,36	68,31	85,59	102,97	119,59	136,89
0,4	17,08	34,27	51,26	68,45	86,36	102,49	120,15	139,74
0,5	17,10	34,15	51,37	68,31	87,01	102,88	119,62	138,94
0,6	17,10	34,16	51,26	69,15	85,53	105,55	122,54	137,04

Riportiamo qui, per ragioni di spazio, soltanto le tre tabelle dei carichi critici relative al riferimento α, ossia dedotte con l'espressione I–$(5)_\alpha$ di W_f che utilizza le caratteristiche di deformazione del Love [7].

Tutte le altre tabelle, accuratamente calcolate sul CINAC, sono depositate presso l'I.N.A.C. del Consiglio Nazionale delle Ricerche (Roma).

b) Riguardo alla pressione sul manto p_{cr} si avverte che la riga $a/L = 0$ delle Tabelle IV e VI è calcolata mediante la (24) (caso critico di Eulero).

c) Riguardo allo sforzo assiale N_{cr} è opportuno fare le seguenti osservazioni.

TABELLA VI.

$10^4 \lambda_{cr} \Phi_1$ (p_{cr} ed N_{cr} da (18) ; $\Phi^* = 1/2$).

a/L \ $50\, h/a$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
0	0,04	0,16	0,36	0,64	1,00	1,44	1,96	2,56
0,1	0,21	0,51	0,99	1,67	2,17	2,51	2,92	3,38
0,2	0,41	1,13	2,10	3,46	4,40	5,51	6,82	8,34
0,3	0,63	1,74	3,36	4,89	6,72	8,96	11,60	14,65
0,4	0,85	2,40	4,36	6,72	9,75	12,45	15,26	18,50
0,5	1,08	3,08	5,58	8,65	11,83	15,73	20,33	24,97
0,6	1,31	3,66	6,78	10,43	15,00	19,12	23,99	29,62

Per tubi di lunghezza $L \to \infty$ la (12) non è più utilizzabile. Se si valuta l'espressione di $\lambda\Phi_2$ per $n = 1$ si vede che essa tende a zero per $L \to \infty$; ciò concorda con i valori della Tabella V e con la realtà fisica.

I valori della Tabella V sono, a loro volta, in soddisfacente accordo con la (23), ad eccezione dei casi $a/L = 0,1$; $50\, h/a \geq 0,8$ (casi nei quali il termine in $K^2 = h^2/(12\, a^2)$ è predominante). Questo accordo è posto in evidenza dalla seguente

TABELLA VII.

$50\, h/a$	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6
$\mu_2 = m_2\, \pi\, a/L$	29	21	17	15	13	12	11	10
$10^4\, \Phi_2^0$ da (23)	22,8	45,5	68,3	91,1	113,9	136,6	159,4	182,2
$10^4\, \Phi_2^0$ da Tab. V	17,1	34,2	51,3	68,4	85,5	102,6	119,7	136,8

Si ha infatti con buona approssimazione dalla (23): $\mu_2 = \sqrt[4]{(1 - \nu^2)/K^2}$, $\Phi_2^0 = 2\, K^2\, \mu_2^2$; ossia $\mu_2\, (p.\ 50\, h/a) = \mu_2\, (50\, h/a)/\sqrt{p}$, $\Phi_2^0\, (p.\ 50\, h/a) = \Phi_2^0\, (50\, h/a)/p$. Inoltre $m_2\, (q\alpha/L)$ è il dispari più prossimo ad $m_2\, (a/L)/q$.