Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Jacques Louis Lions, Enrico Magenes

Contrôle optimal et espaces du type de Gevrey. Nota I

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.1, p. 34–39.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_1_34_0>

Matematica. — *Contrôle optimal et espaces du type de Gevrey* [(*)]. Nota I di Jacques Louis Lions e Enrico Magenes, presentata [(**)] dal Corrisp. L. Amerio.

Riassunto. — Si danno alcuni esempi, sia nel caso stazionario sia in quello di evoluzione, di problemi ai quali si arriva quando si considerano problemi di controllo ottimale per sistemi governati da equazioni a derivate parziali in spazi di funzioni *molto regolari*, analitiche o di tipo di Gevrey.

On donne quelques exemples (dans les cas stationnaires et d'évolution) des problèmes – apparemment nouveaux – aux quels on aboutit lorsque l'on considère des problèmes de contrôle optimal pour des systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles dans des espaces de fonctions *très* régulières – analytiques ou du type classes de Gevrey. Les démonstrations détaillées seront exposées dans le vol. 3 de notre livre [2].

Systèmes elliptiques.

1. *Position du problème.*

1.1. *Notations.*

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbf{R}^n$ de frontière Γ, variété analytique réelle de dimension $n - 1$, Ω étant localement d'un seul côté de Γ.

Soit A l'opérateur du deuxième ordre

$$Au = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)$$

et supposons que les coefficients a_{ij} soient analytiques réels dans $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ et que A soit elliptique dans $\overline{\Omega}$ [(1)].

On suppose que l'*état* d'un système physique est donné par

$$y = y(x\,;v) \quad , \quad x \in \Omega \quad , \quad v = \text{contrôle},$$

solution de

$$Ay(x\,;v) = 0 \qquad \text{dans } \Omega, \tag{1.1}$$

$$y(x\,;v) = v \qquad \text{sur } \Gamma. \tag{1.2}$$

(On notera aussi $y(v)$ la fonction $x \to y(x\,;v)$).

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato per la Matematica del C.N.R.

(**) Nella seduta del 9 dicembre 1967.

(1) Uniquement pour simplifier l'exposé on a pris l'opérateur A du deuxième ordre (et de type particulier) et on a considéré le problème de Dirichlet relatif à A; mais on peut étendre ce qui suit aux problèmes *réguliers* pour les opérateurs elliptiques d'ordre quelconque à coefficients analytiques.

On va supposer que v demeure dans un espace de fonctions *analytiques sur* Γ. De façon précise (cfr. [4], I) on introduit:

$$\Delta_\Gamma = \text{opérateur de Laplace Beltrami sur } \Gamma$$

$$(1.3) \quad \begin{cases} \mathcal{H}^L(\Gamma) = \{\text{espace des fonctions } \varphi \text{ telles que} \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{L^{2k}((2k)!)^2} \|\Delta_\Gamma^k \varphi\|^2_{L^2(\Gamma)} = \|\varphi\|^2_{\mathcal{H}^L(\Gamma)} < \infty\} \text{ (2)}. \end{cases}$$

On sait (cfr. par exemple [4], I)) que $\mathcal{H}^L(\Gamma)$ est un espace de fonctions analytiques réelles sur Γ; muni de la norme $\|\varphi\|_{\mathcal{H}^L(\Gamma)}$, $\mathcal{H}^L(\Gamma)$ est un espace de Hilbert.

L'espace $\mathcal{H}(\Gamma)$ de *toutes* les fonctions analytiques réelles sur Γ est la réunion des $\mathcal{H}^L(\Gamma)$ lorsque L parcourt une suite $\{L_n\}$ croissant et tendant vers $+\infty$. On muni $\mathcal{H}(\Gamma)$ de la topologie de limite inductive de $\mathcal{H}^{L_n}(\Gamma)$.

On supposera dans la suite que

$$(1.4) \qquad v \in \mathcal{U} = \mathcal{H}^L(\Gamma) \qquad (L > 0 \text{ fixé}).$$

Alors (cfr. [5])

$$(1.5) \qquad \frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} \in \mathcal{H}^{L_1}(\Gamma) \quad (\nu_A \textit{ normale } \text{à } \Gamma \text{ par rapport à } A)$$

où L_1 dépend de L et des coefficients de A et de Γ.

Pour tout $v \in \mathcal{U}$ on peut donc définir la *fonction*:

$$(1.6) \qquad J(v) = \left\| \frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - z_d \right\|^2_{\mathcal{H}^{L_1}(\Gamma)} + \nu \|v\|^2_{\mathcal{H}^L(\Gamma)}$$

où

z_d est donné dans $\mathcal{H}^{L_1}(\Gamma)$,

ν est un nombre > 0 donné.

1.2. *Problème de contrôle.*

On considère maintenant

$$(1.7) \qquad \mathcal{U}_{ad} = \text{ensemble convexe fermé} \subset \mathcal{U},$$

et l'on cherche

$$(1.8) \qquad \operatorname*{Inf.}_{v \in \mathcal{U}_{ad}} J(v)$$

Il est immédiat de vérifier qu'*il existe un élément* $u \in \mathcal{U}_{ad}$ et *un seul tel que*

$$J(u) \leq J(v) \qquad \forall\, v \in \mathcal{U}_{ad}.$$

On dit que u est *le contrôle optimal.*

Notre objet est de donner le système d'équations et d'inéquations qui caractérisent le contrôle optimal.

(2) Pour simplifier, toutes les fonctions sont prises à valeurs réelles.

2. *Conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité.*

2.1. *Première caractérisation.*

Si $J'(v)$ désigne la dérivé de J (dont on vérifie sans peine l'existence) alors le contrôle optimal u est caractérisé par

$$J'(u)(v-u) \geq 0 \qquad \forall\, v \in \mathfrak{U}_{ad} \tag{2.1}$$

ce qui équivaut à

$$\left(\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_d , \frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}\right)_{\mathcal{H}^{L_1}(\Gamma)} + \nu(u, v-u)_{\mathcal{H}^{L}(\Gamma)} \geq 0 \quad \forall\, v \in \mathfrak{U}_{ad}. \tag{2.2}$$

2.2. *Etat adjoint.*

D'après la Proposition 1.3 de [4], 1) la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{L_1^{2k}((2k)!)^2} \Delta_\Gamma^{2k} \left(\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_d\right)$$

représente une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}(\Gamma)$, i.e. un élément de l'espace $\mathcal{H}'(\Gamma)$ des fonctionnelles analytiques sur Γ. Et alors d'après encore [4], 1), théor. 9.1, le problème de Dirichlet

$$A^* p(u) = 0 \tag{2.3}$$

$$p(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{L_1^{2k}((2k)!)^2} \Delta_\Gamma^{2k} \left(\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_d\right) \tag{2.4}$$

où A^* est l'adjoint formel de A; admet une solution unique $p(u) \in \mathcal{D}'(\Omega)$, la condition (2.4) étant prise au sens de $\mathcal{H}'(\Gamma)$. La distributions $p(u)$ est appelée l'*état adjoint* du problème de controle.

2.3. *Transformation de* (2.2).

En utilisant la *formule de Green* de [4], 1) théor. 8.1, on peut alors écrire la relation suivante

$$-\left< \frac{\partial p(u)}{\partial \nu_{A^*}} , y(v) - y(u) \right> + \left< p(u) , \frac{\partial}{\partial \nu_A}(y(v) - y(u)) \right> = 0 \tag{2.5}$$

où les crochéts désignent la dualité entre $\mathcal{H}'(\Gamma)$ et $\mathcal{H}(\Gamma)$. On déduit de (2.5) et (2.4) que

$$\left(\frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A} - z_d , \frac{\partial y(v)}{\partial \nu_A} - \frac{\partial y(u)}{\partial \nu_A}\right)_{\mathcal{H}^{L_1}(\Gamma)} = \left< \frac{\partial p(u)}{\partial \nu_{A^*}} , v - u \right>. \tag{2.6}$$

Posons:

$$\Lambda^L = \Sigma \frac{1}{L^{2k}((2k)!)^2} \Delta_\Gamma^{2k}. \tag{2.7}$$

Alors

$$(u\,,v-u)_{\mathcal{H}^{\mathrm{L}}(\Gamma)} = <\Lambda^{\mathrm{L}} u\,, v-u> \tag{2.8}$$

de sorte que, avec (2.6) et (2.8), la condition (2.2) équivaut à

$$<\frac{\partial p(u)}{\partial \nu_{\mathrm{A}^*}} + \nu\Lambda^{\mathrm{L}} u\,, v-u> \geq 0 \qquad \forall v \in \mathfrak{U}_{ad}. \tag{2.9}$$

2.4. *Conclusion.*

On résume les résultats obtenus dans le

THÉORÈME 2.1. *Le contrôle optimal u est donné par la résolution du système*

$$\begin{cases} \mathrm{A}y(u) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathrm{A}^* p(u) = 0 & \text{dans } \Omega, \end{cases} \tag{2.10}$$

$$\begin{cases} y(u) = u & \text{sur } \Gamma \\ p(u) = \Lambda^{\mathrm{L}_1}\left(\dfrac{\partial y(u)}{\partial \nu_{\mathrm{A}}} - z_d\right) & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \tag{2.11}$$

$$<\frac{\partial p(u)}{\partial \nu_{\mathrm{A}^*}} + \nu\Lambda^{\mathrm{L}} u\,, v-u> \geq 0 \qquad \forall v \in \mathfrak{U}_{ad}. \tag{2.9}$$

3. *Applications.* (1). *Cas sans contraintes.*

On dit que le problème est *sans contraintes* lorsque $\mathfrak{U}_{ad} = \mathfrak{U}$. Alors (2.9) se réduit à (puisque $\mathcal{H}^{\mathrm{L}}(\Gamma)$ est dense dans $\mathcal{H}(\Gamma)$)

$$\frac{\partial p}{\partial \nu_{\mathrm{A}^*}}(u) + \nu\,\Lambda^{\mathrm{L}} u = 0. \tag{3.1}$$

On peut *éliminer u* dans (2.10) (2.11) (2.9); on obtient:

$$\begin{cases} \mathrm{A}y = 0 \\ \mathrm{A}^* p = 0 \end{cases} \qquad \text{dans } \Omega \tag{3.2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial \nu_{\mathrm{A}^*}} + \nu\Lambda^{\mathrm{L}} y = 0 & \text{sur } \Gamma \\ p = \Lambda^{\mathrm{L}}\left(\dfrac{\partial y}{\partial \nu_{\mathrm{A}}} - z_d\right) & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{3.3}$$

Le contrôle optimal s'obtient donc:

(i) *en résolvant le système* (3.2) (3.3) [(3)]

(ii) *en posant* $u = y|_{\Gamma}$.

(3) Le système (3.2) (3.3) est un système elliptique *couplé* ayant la particularité que la composant y de la solution $(y\,,p)$ est « *très régulière* », alors que la composante p est « *très irrégulière* ». Les composants y et p sont « en dualité ».

4. *Applications.* (II). *Cas avec contraintes*:

On prend maintenant

$$\mathcal{U}_{ad} = \{v \mid v \in \mathcal{U} = \mathcal{H}^{L}(\Gamma) \quad , \quad v \geq 0 \text{ sur } \Gamma\}. \tag{4.1}$$

Alors (2.9) *équivaut* à (car $\mathcal{H}_{ad}$ est un *cône* de *sommet* $\{0\}$)

$$< \frac{\partial}{\partial \nu_{A^*}} p(u) + \nu \Lambda^{L} u , v > \geq 0 \qquad \forall v \in \mathcal{U}_{ad} , \tag{4.2}$$

$$< \frac{\partial}{\partial \nu_{A^*}} p(u) + \nu \Lambda^{L} u , u > = 0 \tag{4.3}$$

Mais si $v \in \mathcal{H}(\Gamma)$, $v \geq 0$ sur Γ, il existe $v_j \in \mathcal{H}^{L}(\Gamma)$, $v_j \geq 0$, $v_j \to v$ dans $\mathcal{H}(\Gamma)$, et donc (4.2) implique (et équivaut à) la même inégalité $\forall v \in \mathcal{H}(\Gamma)$, $v \geq 0$ sur Γ. Donc

$$\frac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}}(u) + \nu \Lambda^{L} u \text{ est un fonctionnelle analytique } \geq 0. \tag{4.4}$$

Mais, par un raisonnement analogue à celui de Schwartz [6] pour montrer que toute distribution ≥ 0 est une mesure ≥ 0, on vérifie que (4.4) équivaut à:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_{A^*}} p(u) + \nu \Lambda^{L} u \text{ est une mesure } \geq 0 \text{ sur } \Gamma. \tag{4.5}$$

La condition (4.3) équivaut alors à

$$u\left(\frac{\partial}{\partial \nu_{A^*}} p(u) + \nu \Lambda^{L} u\right) = 0 \qquad \text{sur } \Gamma. \tag{4.6}$$

On obtient donc finalement: *le contrôle optimal est fourni par la résolution du système*:

$$\begin{cases} Ay = 0 \\ A^* p = 0 \end{cases} \qquad \text{dans } \Omega \tag{4.7}$$

$$\begin{cases} p = \Lambda^{L}\left(\dfrac{\partial y}{\partial \nu_{A}} - z_d\right) & \text{sur } \Gamma \\ y \geq 0 & \text{sur } \Gamma \\ \dfrac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} + \nu \Lambda^{L} y \geq 0 & \text{sur } \Gamma \\ y\left(\dfrac{\partial p}{\partial \nu_{A^*}} + \nu \Lambda^{L} y\right) = 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \tag{4.8}$$

Alors

$$u = y|^{\Gamma}$$

Remarque 4.1.

Le problème (4.7) (4.8) est du type *unilatéral,* comme il en intervient dans *toute* la théorie du contrôle optimal de systèmes gouvernês par des équations aux dérivées partielles, cfr. [1], [2] chap. 6. Le point nouveaux ici est l'introduction de l'*opérateur d'ordre infini* Λ^{Γ}. Le problème (4.7) (4.8) est donc un exemple de *problème non linéaire contenant des opérateurs d'ordre infini.*

Remarque 4.2.

On peut évidemment multiplier les exemples: dans [1], on a pris les systèmes elliptiques dans des espaces de Sobolev *d'ordre fini*; ils ont leurs analogues avec « l'*ordre infini* ».

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J. L. LIONS, 1) *Sur le contrôle optimal de systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles linéaires,* «C. R. Acad. Sci.», Paris, *263,* 661–663, 713–715, 776–779 (1966). 2) *Sur le contrôle optimal de systèmes décrits par des équations aux dérivées partielles linéaires,* «Cours Fac. Sciences», Paris, à paraître.

[2] J. L. LIONS e E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes et applications,* Dunod, Paris, 1968, à paraître.

[3] J. L. LIONS e E. MAGENES, *Quelques remarques sur les problèmes aux limites linéaires elliptiques et paraboliques dans des classes d'ultra-distributions,* « Rend. Acc. Lincei », *43,* 293–299, 469–478 (1967).

[4] J. L. LIONS e MAGENES; 1) *Problèmes aux limites non homogènes (VII),* « Ann. Mat. pura Appl. », *63,* 201–224, (1963); 2) *Espaces de fonctions et distributions du type de Gevrey et problèmes aux limites paraboliques,* « Ann. Mat. pura appl. », *68,* 341–418 (1965); 3) *Espaces du type de Gevrey et problèmes aux limites pour diverses classes d'équations d'évolution,* « Ann. Mat. pura Appl. », *72,* 343–394 (1966).

[5] C. B. MORREY e L. NIRENBERG, *On the analyticity of the solutions of linear elliptic systems of partial differential equations* «Comm. Pure Appl. Math.», *10,* 271–290 (1957).

[6] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions,* t. 1, Herman, Paris, 1950.

[7] K. YOSIDA, *Functional Analysis,* Springer, Berlin, 1965.