Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Edmundo Rofman

Problemi hamiltoniani non conservativi. Carichie velocità critiche

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **44** (1968), n.5, p. 653–658.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_44_5_653_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Meccanica. — *Problemi hamiltoniani non conservativi. Carichi e velocità critiche.* Nota di EDMUNDO ROFMAN, presentata [(*)] dal Socio G. KRALL.

SUMMARY. — The Author computes, by means of a suitable approximation method, the critical values of load and speed in two cases of transversal elastic motion of a tube under axial stress.

Ritorniamo qui su un problema in cui le condizioni ai limiti, sotto le quali si vogliono determinare soluzioni di una equazione differenziale ottenuta mediante il classico principio di Hamilton, non derivano *naturalmente* dalla applicazione di tale principio. Più concretamente ci riferiremo alle equazioni che si ottengono quando si studia il moto elastico trasversale di un'asta soggetta ad una sollecitazione assiale costante, agendo la forza all'estremo dell'asta secondo la direzione della tangente all'asse della deformata in quel punto ([1], [2], [3]) [(1)]. Considereremo simultaneamente due cause diverse di tale sforzo assiale: 1) esso provenga dall'azione di una forza esterna di compressione applicata all'estremo del tubo; 2) lo sforzo risulti, come virtuale, per effetto Coriolis, da un flusso ρAV di materia (ρ: densità, A: area della sezione trasversale del tubo, V: velocità) nell'interno del tubo. Per il calcolo dei valori critici, tanto per le forze come per la velocità, estenderemo alla determinazione degli autovalori un metodo approssimato che fu oggetto di una precedente comunicazione [4]. Nel seguito della Nota si confrontano su un esempio i valori che si ottengono nei diversi casi.

Indicando con $w(x, t)$ le vibrazioni trasversali e con μ_0 la massa dell'unità di lunghezza del tubo, si hanno (cfr. [5], [1]) le equazioni

$$\mathrm{EI}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mathrm{P}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

$$\mathrm{EI}\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho \mathrm{AV}^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\,\rho\mathrm{AV}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t} + (\mathrm{A}\rho + \mu_0)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{2}$$

rispettivamente per il caso che agisca soltanto la forza esterna P o che si tratti dell'azione del flusso ρAV.

Nella (1), dopo avere posto $w(x, t) = y(x)\,e^{i\alpha t}$, eseguiamo il cambiamento di variabile $\xi = \frac{x}{l}$ (l: lunghezza del tubo). Essendo conveniente avere l'equazione in forma adimensionale useremo le notazioni

$$\frac{\mathrm{P}l^2}{\mathrm{EI}} = \lambda^2 \quad , \quad \frac{\mu_0\,\alpha^2\,l^4}{\mathrm{EI}} = u \tag{2*}$$

(*) Nella seduta del 20 aprile 1968.

(1) All'altro estremo l'asta, necessariamente un tubo per il caso 2), si ha un *incastro*.

ed indicando $\frac{d}{d\xi}$ con $(\ )'$ si avrà (cfr. [8], p. 154)

$$y^{(IV)} + \lambda^2 y'' - uy = 0 \tag{1'}$$

mentre nella (2), avendo posto $w(x, t) = y(x)\, e^{zt}$ ed eseguito lo stesso cambiamento di variabile, con le posizioni

$$\sqrt{\frac{\rho A}{EI}}\, l V = \lambda \quad , \quad \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}\, l^2 z = \zeta \quad , \quad \frac{\mu_0}{A\rho} = \beta \tag{2}^{**}$$

risulta

$$y^{(IV)} + \lambda^2 y'' + 2\,\zeta\lambda y' + (1 + \beta)\,\zeta^2 y = 0. \tag{2'}$$

a) *Caso del tubo appoggiato agli estremi*. Dalla (1), in regime stazionario $\left(\frac{\partial w}{\partial t} = 0\right)$ si ha, secondo Eulero, $P_{cr} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$ essendo questo valore anche il valore critico di ρAV^2, studiato sulla (2), come segue dall'analisi diretta o dalle deduzioni che sfruttano il carattere conservativo di questo caso (cfr. [1]). Merita rilevare che, essendo l'estremo a snodo, le condizioni $y(1) = y''(1) = 0$, concordanti con l'assenza di spostamenti rigidi, non si modificano quando si consideri variabile la direzione della forza agente nell'estremo (come sarebbe giusto farlo nel caso che esca il flusso ρAV); la componente normale all'asse in condizioni di riposo resta assorbita dall'appoggio.

b) *Caso del tubo incastrato ad un estremo e libero nell'altro*. Per P (applicata all'estremo libero) agente sempre parallelo all'asse che congiunge gli estremi nella posizione iniziale, si ha da (1), per il regime stazionario secondo Eulero, $P_{cr} = \frac{\pi^2}{4}\frac{EI}{l^2}$. Questo valore mantiene il suo carattere critico per ρAV^2, studiando la (2) in regime dinamico purché si considerino agli estremi le condizioni *naturali* corrispondenti a questo caso (cfr. [1], [2]).

Se invece supponiamo che P agisca in ogni istante secondo la direzione della tangente alla deformata, la soluzione si ottiene soltanto da un'analisi dinamica giacché l'unica soluzione statica è $w = 0$ (cfr. [3]).

A partire da (1) con le condizioni agli estremi

$$w(0, t) = w_x(0, t) = w_{xx}(1, t) = w_{xxx}(1, t) = 0 \tag{3}$$

si ottiene, secondo [5], $\lambda_{cr}^2 = 19{,}818$ $\left(P_{cr} = 2{,}008\, \pi^2 \frac{EI}{l^2}\right)$ e, secondo diversi metodi approssimati, in [3], $\lambda_{cr}^2 = 20{,}106\ (= 2{,}06\,\pi^2)$, $21{,}644\ (= 2{,}193\,\pi^2)$.

Per facilitare il confronto coi risultati degli altri casi, che studieremo a posteriori, calcoleremo col metodo, cfr. [4], accennato all'inizio, il λ_{cr}^2 in questione.

Assumiamo come soluzione della (1′) $y = \sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(\xi)$, con $\varphi_i(\xi)$ polinomio soluzione dell'equazione $\varphi_i^{(IV)} = \xi^{i-1}$ con le condizioni (3), riferite alla ξ, agli estremi [(1)].

Designando brevemente con $\mathfrak{L}_\lambda[y]$ il primo membro di (1′), e imponendo a

$$\mathfrak{L}_\lambda\left[\sum_{i=1}^{n} c_i \varphi_i(\xi)\right] = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathfrak{L}_\lambda[\varphi_i(\xi)] = \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(\xi)$$

di verificare la (1′) in n punti interni equidistanti, si ottiene il sistema lineare nelle c_i,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i(a_k) = 0 \quad , \quad a_k = \frac{k}{n+1} , \qquad k = 1 , 2 , \cdots , n.$$

Dall'equazione

$$\det((\psi_i(a_k))) = 0 , \qquad i , k = 1 , 2 , \cdots , n \tag{4}$$

ricaveremo il minimo valore positivo di λ^2 a partire dal quale l'equazione nella incognita u, cfr. (2)*, che risulta, presenta radici complesse coniugate. Questo valore, avendo scelto gli esponenti caratteristici nella forma $i\alpha$, indica che uno degli esponenti caratteristici della soluzione ha la sua parte reale positiva [(2)], e ciò porta, per t crescente, all'instabilità del tubo.

Per $n = 2$ proponiamo

$$y = c_1(\xi^4 - 4\xi^3 + 6\xi^2) + c_2(\xi^5 - 10\xi^3 + 20\xi^2) , \; a_1 = \frac{1}{3} , \; a_2 = \frac{2}{3} , \tag{5}$$

ottenendo per la (4) l'equazione in u:

$$\frac{245}{3^6} u^2 - \left[257 - \frac{1009}{2 \cdot 3^4} \lambda^2\right] u + 3240 + 60\lambda^2 + \frac{40}{3} \lambda^4 = 0$$

da cui

$$\lambda_{cr}^2 \cong 21{,}8926 . \tag{6}$$

Per $n = 3$ sommando alla precedente soluzione $c_3(\xi^6 - 20\xi^3 + 45\xi^2)$ e fissando $a_1 = \frac{1}{4}$, $a_2 = \frac{1}{2}$, $a_3 = \frac{3}{4}$ si ottiene $\lambda_{cr}^2 \cong 18{,}72$ cioè $P_{cr} = 1{,}897\,\pi^2 \frac{EI}{l^2}$.

Invece, se si adottano come funzioni approssimanti le autofunzioni $u_n(\xi)$ dell'asta omogenea incastrata in un estremo e libera nell'altro, le quali soddisfano l'equazione $\frac{d^4 u}{d\xi^4} - \delta^4 u(\xi) = 0$ con le condizioni (3) agli estremi, in

(1) Questi polinomi corrispondono alle deformate di un'asta incastrata ad un estremo e libera nell'altro, sottoposta successivamente a carichi di distribuzione costante, linearmente variabile, parabolica, ecc.

(2) Dalle posizioni $w(x, t) = y(x) e^{i\alpha t}$, $u = \frac{u_0 l^4}{EI} \alpha^2$ segue che α è reale se è $u \geq 0$, α è immaginario puro se $u < 0$; mentre se u è complesso uno dei valori di $i\alpha$ ha parte reale positiva.

corrispondenza a valori noti degli autovalori δ (cfr. ad esempio [5]), per $n = 2$ proponiamo

$$y = c_1 [-\mathrm{Ch}\, 1{,}8751\, \xi + \cos 1{,}8751\, \xi + 0{,}734095\, (\mathrm{Sh}\, 1{,}8751\, \xi - \\ - \mathrm{sen}\, 1{,}8751\, \xi)] + c_2 [-\mathrm{Ch}\, 4{,}69409\, \xi + \cos 4{,}69409\, \xi + 1{,}018467 \\ (\mathrm{Sh}\, 4{,}69409\, \xi - \mathrm{sen}\, 4{,}69409\, \xi)] \tag{7}$$

con

$$a_1 = \frac{1}{3} \quad , \quad a_2 = \frac{1}{3} \; .$$

e si ottiene

$$\lambda_{cr}^2 \cong 19{,}133. \tag{8}$$

Consideriamo ora con le stesse condizioni ai limiti un'asta–tubo con flusso interno ρAV. Rappresentando con $\mathfrak{L}_\lambda^* [y]$ il primo membro di (2′) realizzeremo lo stesso procedimento sopraccitato. Però a questo punto dobbiamo osservare che i coefficienti del polinomio in ζ ottenuti sviluppando il determinante (4) risultano funzioni tanto di λ^2 come di β (5). Pertanto per un valore fissato di β ed essendo necessario per la stabilità che i valori di ζ siano a parte reale negativa (3), si cercherà il valore critico di λ^2 applicando il criterio dell'Hurwitz.

Con $n = 2$ e proponendo come soluzione la (5) si ottiene come espressione di (4) (cfr. [2]):

$$0{,}0998\, (1 + \beta)^2 \zeta^4 + 1{,}2226\, (1 + \beta)\, \lambda\zeta^3 + \{76{,}1504\, (1 + \beta) + [6{,}2178 - \\ - (1 + \beta)\, 1{,}8451]\, \lambda^2\}\, \zeta^2 + \lambda\, [346{,}6640 - 0{,}4944\, \lambda^2]\, \zeta + 960 + \\ + 17{,}7783\, \lambda^2 + 3{,}9510\, \lambda^4 = 0.$$

Useremo $\beta = 1000$ (4). Il polinomio che si ottiene risulta un polinomio di Hurwitz per $\lambda > 0$, $\lambda^2 < 20{,}556$. Si avrà così

$$\lambda_{cr}^2 \cong 20{,}556 \qquad \text{da dove} \quad \rho AV_{cr}^2 = 2{,}083\, \pi^2 \frac{EI}{l^2} \; . \tag{9}$$

Se invece, adottiamo, come funzione approssimante, la (7) si otterrà per (4) l'espressione

$$1{,}01009769\, (1 + \beta)^2 \zeta^4 + 14{,}7484\, (1 + \beta)\, \lambda\zeta^3 + \{502{,}90805\, (1 + \beta) + \\ + [79{,}75876 - 13{,}65300\, (1 + \beta)]\, \lambda^2\}\, \zeta^2 + \lambda\, [1656{,}52794 + 50{,}23472\, \lambda^2]\, \zeta + \\ + 78{,}25571\, \lambda^4 - 1057{,}74687\, \lambda^2 + 6062{,}70938 = 0$$

(3) Così che, essendo $z = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}\, \frac{1}{l^2}\, \zeta$, anche z risulta a parte reale negativa e la $w(x, t) = y(x)\, e^{zt}$ è stabile per $t \to +\infty$.

(4) Vedi [7], pp. 923–924, che indica inoltre, $EI = 3 \cdot 10^6$ Kg cm².

(5) Cfr. la (2)**.

e, per $\beta = 1000$ risulterà

$$\lambda^2_{cr} = 18{,}63. \tag{10}$$

Il confronto di (9) con (6) e (10) con (8) suggerisce la conclusione che i valori critici per il caso di un flusso risultano inferiori a quelli ottenuti nelle stesse condizioni di sostegno del tubo quando si considera una carica esterna P.

c) *Caso del tubo libero agli estremi volante con velocità supersonica.* In queste condizioni, dovute al carattere supersonico delle velocità che si ottengono, giova osservare, come già è stato fatto in [1], che la (2) è sostanzialmente l'equazione del moto elastico trasversale di un tubo soggetto all'azione aerodinamica della corrente esterna, calcolata secondo la teoria di Miles (vedi [7]). Nel nostro problema abbiamo una lunghezza finita; consideriamo la (2) con le condizioni agli estremi

$$w_{xx}(0\,,t) = w_{xxx}(0\,,t) = w_{xx}(1\,,t) = w_{xxx}(1\,,t) = 0.$$

Useremo come funzioni approssimanti le autofunzioni dell'asta libera agli estremi, le quali saranno riferite ad una variabile ξ, che varia in $\left[-\frac{1}{2}\,,\frac{1}{2}\right]$ per avvantaggiarsi della simmetria. Il sistema differenziale verificato dalle funzioni approssimanti $\varphi(\xi)$ è

$$\begin{cases} \dfrac{d^4\varphi}{d\xi^4} - \delta\varphi(\xi) = 0 \\ \varphi''\left(-\frac{1}{2}\right) = \varphi'''\left(-\frac{1}{2}\right) = \varphi''\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi'''\left(\frac{1}{2}\right) = 0 . \end{cases}$$

Si ottiene la successione $\{\varphi_k(\xi)\}$ in corrispondenza a valori noti di δ (vedi ad esempio [6]).

Useremo, dato il carattere del problema, soltanto le funzioni corrispondenti ad autovalori pari.

Proponiamo dunque come soluzione, per $n = 3$

$$\begin{aligned} y = c_0 + c_2\,(5{,}36909 \cos 4{,}73004\,\xi - 0{,}71332 \operatorname{Ch} 4{,}73004\,\xi) + \\ + c_4\,(122{,}07937 \cos 10{,}9956\,\xi - 0{,}70111 \operatorname{Ch} 10{,}9956\,\xi) \end{aligned}$$

ed adottiamo $a_1 = 0\,, a_2 = \frac{1}{6}\,, a_3 = \frac{1}{3}$ $\Big($in realtà si tratta di 5 punti giacché, per la simmetria si sta tenendo conto dei valori $-\frac{1}{3}\,,-\frac{1}{6}\Big)$.

La (4) risulta

$$\begin{aligned} 0{,}56973\,(1+\beta)^2\,\zeta^4 + 19{,}26999\,(1+\beta)\,\lambda\zeta^3 + \{8613{,}74249\,(1+\beta) + \\ + [218{,}91999 - 79{,}89399\,(1+\beta)]\,\lambda^2\}\,\zeta^2 + \lambda\,(12655{,}67 - 419{,}81888\,\lambda^2)\,\zeta + \\ + 4168967{,}3 - 148600{,}25\,\lambda^2 + 989{,}599080\,\lambda^4 = 0. \end{aligned}$$

Sempre per $\beta = 1000$ risulta mediante l'applicazione del criterio di Hurwitz il valore

$$\lambda_{cr}^2 = 18{,}783$$

seguendo pertanto

$$\rho A V_{cr}^2 = 18{,}783 \frac{EI}{l^2} \cdot$$

I calcoli qui riportati sono stati controllati, e per sicurezza, taluno anzi rifatto indipendentemente, all'INAC, grazie alla generosità del suo direttore prof. A. Ghizzetti.

BIBLIOGRAFIA.

[1] G. KRALL, *Sul problema centrale della dinamica dei ponti*, Nota II, « Rendiconti Acc. Naz. dei Lincei », Serie VIII, *38*, fasc. 6 (1965)..

[2] E. ROFMAN, *Sobre la velocidad critica de un fluido que circula por un tubo*, « Mathematicae Notae », *21*, fasc. 1–2.

[3] G. KRALL, *Osservazioni sui principi variazionali per la stabilità elastostatica e loro applicazioni*, « Memorie Acc. Naz. dei Lincei », *8*, Sezione I (1967).

[4] E. ROFMAN, *Osservazioni sulla convergenza di un metodo d'integrazione per punti di equazioni differenziali*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », Serie VIII, *37*, Set–Ott. 1964.

[5] MAX BECK, « Z. angew. Math. Physik », *3* (1952).

[6] D. CALIGO, *Complementi analitici e numerici allo studio delle aste vibranti*, « Rend. Acc. Naz. dei Lincei », serie VIII, *12* (1952).

[7] KACPRZYNSKI e KALISKI, *Advances in Aeronautical Sciences*, *4*, Pergamon Press, 1962.

[8] S. TIMOSHENKO e J. GERE, *Theory of Elastic Stability*, Mc Graw – Hill Book, N. Y. 1961.