Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Massimo Furi

Un teorema di punto fisso per trasformazioni di uno spazio metrico completo in sé

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.5, p. 207–211.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_5_207_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1968.

Analisi matematica. — *Un teorema di punto fisso per trasformazioni di uno spazio metrico completo in sé*. Nota di MASSIMO FURI, presentata (*) dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY. — In this paper we give a theorem about the existence and uniqueness of fixed points for a mapping $T : X \to X$ on a complete metric space X. The mapping T is assumed to satisfy the condition $d(T(x), T(y)) \leq \omega(d(x,y))$ for every x and y belonging to X, where $\omega(r)$ is a convenient real function.

1. - Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia inoltre $T : X \to X$ una trasformazione di X in sé tale che

$$d(T(x), T(y)) \leq \omega(d(x,y)) \quad , \quad \forall (x,y) \in X^2, \tag{1}$$

dove $\omega(r)$ è una funzione reale non negativa, definita in $[0, +\infty)$ e soddisfacente le seguenti condizioni:

(*a*) $\omega(r)$ è non decrescente;

(*b*) posto $\omega^1(r) = \omega(r)$, $\omega^{n+1}(r) = \omega(\omega^n(r))$, si ha

$$\lim_n \omega^n(r) = 0 \quad , \quad \forall r \geq 0.$$

Com'è noto la T si dice una contrazione in X se la (1) vale per $\omega(r) = kr$, con $0 \leq k < 1$. Talune proprietà delle contrazioni sussistono, come ora vedremo, nel caso più generale qui considerato. Anzitutto si ha la

PROPOSIZIONE I. - *La* T *è uniformemente continua in* X.

Dimostrazione. Per la (1) basta provare che da (*a*) (*b*) segue

$$\lim_{r \to 0+} \omega(r) = 0.$$

Dalla (*a*) si ha

$$\lim_{r \to 0+} \omega(r) = l = \inf\{\omega(r) : r > 0\}.$$

Se fosse $l > 0$ si avrebbe $\omega(l) \geq l$ e poiché per ogni $r > 0$ è $\omega(r) \geq l$, da (*a*) seguirebbe $\omega^n(r) \geq l$, $(n = 2, 3, \cdots)$, contro la (*b*).

Posto $T^1(x) = T(x)$, $T^{n+1}(x) = T(T^n(x))$, si ha poi la

PROPOSIZIONE II. - *La successione* $\{T^n(x)\}$ *è di Cauchy se (e solo se) essa è limitata.*

Dimostrazione. Sia $d(x, T^p(x)) \leq M$ per ogni $p \in N$. Da (*a*) segue

$$d(T^{n+p}(x), T^n(x)) \leq \omega^n(d(x, T^p(x))) \leq \omega^n(M)$$

(*) Nella seduta del 19 novembre 1968.

e da (b)

$$\lim_n d(\mathrm{T}^{n+p}(x), \mathrm{T}^n(x)) = 0 \quad , \quad \forall p \in \mathrm{N}.$$

ossia $\{\mathrm{T}^n(x)\}$ è una successione di Cauchy.

Infine si ha la

PROPOSIZIONE III. – *Le successioni $\{\mathrm{T}^n(x)\}$ sono (limitate e quindi) di Cauchy qualunque sia $x \in \mathrm{X}$ oppure nessuna lo è.*

Dimostrazione. Se $x \in \mathrm{X}$, $y \in \mathrm{X}$, dalla (1) e da (a) si ha

$$d(\mathrm{T}^n(x), \mathrm{T}^n(y)) \leq \omega^n(d(x, y))$$

e da (b) segue

$$\lim_n d(\mathrm{T}^n(x), \mathrm{T}^n(y)) = 0.$$

2. – La Prop. III offre una alternativa. Delle due eventualità la piú interessante è, ovviamente, la prima. Infatti se essa è soddisfatta ed inoltre (X, d) è completo, allora qualunque sia $x \in \mathrm{X}$, tutte le $\{\mathrm{T}^n(x)\}$ convergono verso lo stesso limite ξ e questo, in virtú della continuità di T è (l'unico) punto invariante per la T, $\xi = \mathrm{T}(\xi)$. In tal caso ha anche interesse conoscere una maggiorazione dell'errore $d(\mathrm{T}^n(x), \xi)$.

Ovviamente le $\{\mathrm{T}^n(x)\}$ sono tutte limitate se X è limitato o piú in generale se per qualche $k \in \mathrm{N}$ il trasformato $\mathrm{T}^k(\mathrm{X})$ è limitato: questo avverrà in particolare, se $\omega^k(r)$ è limitata.

Il caso di X limitato è stato considerato da F. Browder [1] che ha dato una maggiorazione dell'errore in termini di n, ω, e del diametro di X.

Un'altra condizione per la limitatezza di tutte le $\{\mathrm{T}^n(x)\}$, considerata da R. Bianchini e M. Grandolfi [2], che hanno ottenuto anche una maggiorazione dell'errore, è la convergenza della serie

$$\sum_1^\infty {}_n\, \omega^n(r).$$

Noi daremo nel numero successivo una condizione indipendente da quelle ora ricordate ed otterremo una maggiorazione dell'errore che nel caso delle contrazioni ($\omega(r) = kr$, $0 < k < 1$) si riduce alla ben nota

$$d(\mathrm{T}^n(x), \xi) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x, \mathrm{T}(x)).$$

Supporremo da ora in poi (X, d) completo e faremo in seguito uso del seguente Lemma la cui dimostrazione è immediata.

LEMMA. – *Sia $\{y_n\}$ una successione in uno spazio metrico completo (X, d). Per ogni numero naturale n si abbia $d(y_n, y_{n+1}) \leq \alpha_n$, dove α_n è il termine generale di una serie convergente di numeri reali. In queste ipotesi $\{y_n\}$ converge e si ha*

$$d(y_n, y_0) \leq \sum_n^\infty {}_k\, \alpha_k,$$

essendo y_0 il limite di $\{y_n\}$.

3. – Da ora in avanti supporremo:

(c) $\omega(r)$ continua;

(d) $0 \leq \omega(r) < r$.

Come conseguenza si ha che la successione $\{\omega^n(r)\}$ decresce e tende a zero qualunque sia $r > 0$.

Infatti $\omega^{n+1}(r) = \omega(\omega^n(r)) < \omega^n(r)$ ed essendo $\omega^n(r) \geq 0$, $\{\omega(r)\}$ converge ad un $l \geq 0$. Per la continuità di ω abbiamo quindi $\omega(l) = l$, da cui $l = 0$.

Poniamo $\omega(r) = (1 - \theta(r))\, r$. È chiaro che non si perde in generalità se si pone la (1) nella forma:

$$d(\mathrm{T}(x), \mathrm{T}(y)) \leq (1 - \theta(d(x, y)))\, d(x, y). \tag{2}$$

Da $0 \leq \omega(r) < r$, segue $0 < \theta(r) \leq 1$ $(r > 0)$.

Vedremo che la funzione $\theta(r)$ ha un ruolo essenziale in ciò che segue.

TEOREMA. – *Se* $\omega(r) = (1 - \theta(r))\, r$ *verifica le condizioni* (a), (c), (d) *ed inoltre*:

(e) $\theta(r_2)/\theta(r_1) \geq c > 0$, *per ogni* r_1 *ed* r_2 *tali che* $0 < r_1 \leq r_2$;

(f) $\mathrm{F}(r) = \int_0^r \frac{ds}{\theta(s)} < +\infty$, $r \geq 0$.

Allora esiste ed è unico un punto $\xi \in \mathrm{X}$ *unito per la* T *e si ha*

$$d(\mathrm{T}^n(x), \xi) \leq \frac{1}{c} \mathrm{F}(\omega^n(d_0)),$$

essendo x *un qualunque punto di* X *e* $d_0 = d(x, \mathrm{T}(x))$.

Dimostrazione. Per la successione $\{x_n\}$ delle iterate di x, $x_n = \mathrm{T}^n(x)$, si ha $d(x_n, x_{n+1}) \leq \omega(d(x_{n-1}, x_n))$ e dalla non decrescenza di $\omega(r)$ segue $d(x_n, x_{n+1}) \leq \omega^n(d_0)$. Per il Lemma basta quindi dimostrare che

$$\sum_n^\infty{}_k\, \omega^k(d_0) \leq \frac{1}{c} \mathrm{F}(\omega^n(d_0)).$$

Abbiamo

$$\mathrm{F}(\omega^n(d_0)) = \int_0^{\omega^n(d_0)} \frac{dr}{\theta(r)},$$

ma essendo $\{\omega^n(d_0)\}$ decrescente e convergente a zero, si ha

$$\int_0^{\omega^n(d_0)} \frac{dr}{\theta(r)} = \sum_n^\infty{}_k \int_{\omega^{k+1}(d_0)}^{\omega^k(d_0)} \frac{dr}{\theta(r)}, \qquad \omega^k(d_0) \neq 0.$$

Dal teorema della media segue

$$\int_{\omega^{k+1}(d_0)}^{\omega^k(d_0)} \frac{dr}{\theta(r)} = \frac{\omega^k(d_0) - \omega^{k+1}(d_0)}{\theta(\bar{r})}, \tag{3}$$

dove $\omega^{k+1}(d_0) \leq \bar{r} \leq \omega^k(d_0)$. Il secondo membro della (3) può anche essere scritto:

$$\omega^k(d_0)\frac{1-\omega^{k+1}(d_0)/\omega^k(d_0)}{\theta(\bar{r})} = \omega^k(d_0)\frac{\theta(\omega^k(d_0))}{\theta(\bar{r})}$$

ed essendo $\bar{r} \leq \omega^k(d_0)$, dalla condizione (e) segue

$$\int_{\omega^{k+1}(d_0)}^{\omega^k(d_0)} \frac{dr}{\theta(r)} \geq c\omega^k(d_0).$$

Infine

$$\frac{1}{c}\,F(\omega^n(d_0)) = \frac{1}{c}\sum_n^\infty{}_k \int_{\omega^{k+1}(d_0)}^{\omega^k(d_0)} \frac{dr}{\theta(r)} \geq \sum_n^\infty{}_k\, \omega^k(d_0).$$

4. – Esempio. Sia $f: R \to R$ una qualunque funzione reale tale che

$$|f(b) - f(a)| \leq \omega(|b-a|), \tag{4}$$

per ogni coppia di reali (a, b), con $\omega(r) = (1 - \theta(r))\, r$ soddisfacente le ipotesi del Teorema. Ad esempio la funzione $f(\rho) = \alpha + (1 - \tau(2|\rho|))\,\rho$, dove

$$\tau(\rho) = \begin{cases} \sqrt{\rho} & \text{per } 0 \leq \rho \leq \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \text{per } \frac{1}{4} < \rho \end{cases}$$

e α è una costante reale, verifica la (4), per $\omega(r) = (1 - \tau(r))\, r$. Infatti, fissato $h > 0$, la funzione $f(\rho + h) - f(\rho)$ (eguale a $|f(\rho+h) - f(\rho)|$ perché $f(\rho)$ è non decrescente) raggiunge il massimo quando è minima $g(\rho + h) - g(\rho)$, con $g(\rho) = \tau(2|\rho|)\,\rho$. Essendo $g(\rho)$ dispari, non decrescente e convessa per $\rho \geq 0$, è facile vedere che il minimo cercato si ottiene quando $\rho + h = -\rho$ ossia $\rho = -h/2$. Quindi

$$f(\rho + h) - f(\rho) \leq f\left(\frac{h}{2}\right) - f\left(-\frac{h}{2}\right) = (1 - \tau(h))\, h = \omega(h).$$

Consideriamo l'equazione integrale

$$x(t) = y(t) + \int_0^1 K(t, s) f(x(s))\, ds, \tag{5}$$

dove $y(t) \in C[0, 1]$ e $K(t, s)$ è una funzione continua in $[0, 1] \times [0, 1]$ tale che $|K(t, s)| \leq 1$.

Le soluzioni della (5) sono tutti e solo i punti uniti della trasformazione

$$[Tx](t) = y(t) + \int_0^1 K(t, s) f(x(s))\, ds$$

dello spazio di Banach C [o , 1] in sé. È banale verificare che la T soddisfa la condizione

$$\| T(x) - T(y) \| \leq \omega (\| x - y \|)$$

qualunque siano le funzioni x e y appartenenti a C [o , 1].

La (5) ammette dunque una ed una sola soluzione per ogni $y \in C[0,1]$. Nel caso particolare $f(\rho) = k\rho$, con $0 < k < 1$, posto $K^*(t, s) = K(t, s)\, k$, la (5) diventa la classica equazione integrale di Fredholm.

Bibliografia.

[1] F. E. Browder, *On the convergence of successive approximations for non linear functional equations*, « Indagationes Math. », *30*, 27–35 (1968).

[2] R. M. Bianchini e M. Grandolfi, *Trasformazioni di tipo contrattivo generalizzato in uno spazio metrico* (In corso di pubblicazione).