Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Michail St. Botez-Petre

Alcune considerazioni sugli spazi di Norden

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **45** (1968), n.5, p. 272–277.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1968_8_45_5_272_0>

Geometria. — *Alcune considerazioni sugli spazi di Norden.* Nota di MIHAIL. ST. BOTEZ–PETRE STAVRE, presentata (*) dal Socio E. G. TOGLIATTI.

RÉSUMÉ. — Les auteurs établissent quelques relations entre les espaces de Norden N_n et $\overline{N}_n$, pour obtenir une correspondance conforme et trouvent les formules de toutes les correspondances générales entre ces espaces.

En considérant les espaces de Weyl, W_n et $\overline{W}_n$, ils trouvent que deux espaces W_n et $\overline{W}_n$ sont en correspondance conforme si les tenseurs de courbure sont correspondants.

1. – Si sa che uno spazio di Norden differenziabile X è munito di:

a) una coppia di connessioni simmetriche Γ^i_{jk}, G^i_{jk},

b) uno pseudotensore $g_{ij} = g_{ji}$, non degenere,

c) un vettore ω_k covariante verificante la relazione:

$$g_{i(j)|k} = 2\,\omega_k\, g_{ij} \tag{1.1}$$

ove $g_{i(j)|k}$ è la derivata covariante mista di g_{ij}, [2].

Lo spazio considerato sarà denotato con $N_n(g, \omega, \Gamma, G)$.

È stato provato [2] che un $N_n(g, \omega, \Gamma, G)$ può essere considerato come uno spazio di Weyl, $W_n(g, \omega, \gamma)$, ove:

$$\gamma^i_{jk} = \frac{1}{2}\left(\Gamma^i_{jk} + G^i_{jk}\right) \tag{1.2}$$

munito in più di un campo di pseudotensori:

$$\zeta^i_{jk}\, g_{il} = \zeta_{jkl} \quad ; \quad \zeta^i_{jk} = G^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} \tag{1.3}$$

con $\zeta_{ijk} = \zeta_{(ijk)}$ e reciprocamente.

L'importanza di questa proposizione emerge dal fatto che in qualche caso è più adatto studiare le proprietà di un N_n con l'aiuto degli spazi W_n. Da questa osservazione segue una nuova dimostrazione del

TEOREMA 1. *Le connessioni* G^i_{jk} *coniugate con* Γ^i_{jk} *relative a* g_{ij}, *possono esprimersi unicamente con* g_{ij} *e* Γ^i_{jk}.

Infatti, se $N_n(g, \omega, \Gamma, G)$ è considerato al pari di un $W_n(g, \omega, \gamma)$, nelle dette condizioni si ha che:

$$\gamma^i_{jk} = \left\{ {i \atop j\;k} \right\} - \delta^i_j\, \omega_k - \delta^i_k\, \omega_j + g_{jk}\, \omega^i \tag{1.4}$$

$$g_{ij;k} = 2\,\omega_k\, g_{ij} \quad ; \quad \zeta_{ijk} = \zeta_{(ijk)} \tag{1.5}$$

ove con ,, ; " s'intende la derivata covariante rispetto a γ^i_{jk}.

(*) Nella seduta del 19 novembre 1968.

Si ha dunque:

$$\omega_k = \frac{1}{n-1} g^{lm} g_{l[m|k]} \tag{1.6}$$

Applicando la relazione:

$$G^i_{jk} = 2\, \gamma^i_{jk} - \Gamma^i_{jk}$$

e considerando le (1.4) e (1.6), abbiamo:

$$G^i_{jk} = 2 \left[\left\{ {i \atop j\ k} \right\} - \delta^i_j\, \omega_k - \delta^i_k\, \omega_j + g_{ij}\, g^{hl}\, \omega_h \right] - \Gamma^i_{jk}\,. \tag{1.7}$$

Se in quest'ultima relazione si fa la sostituzione di ω_k con (1.6) abbiamo proprio il teorema proposto.

2. – Siano gli spazi di Norden, $N_n (g\,,\omega\,,\Gamma, G)$ ed $\bar{N}_n (\bar{g}\,,\bar{\omega}\,,\bar{\Gamma}, \bar{G})$, che possono essere considerati come spazi di Weyl $W(g\,,\omega\,,\gamma)$ e $\bar{W}(\bar{g}\,,\bar{\omega}\,,\bar{\gamma})$ con:

$$\zeta_{ijk} = \zeta_{(ijk)} \qquad \text{e} \qquad \bar{\zeta}_{ijk} = \bar{\zeta}_{(ijk)}\,.$$

Diremo che: *due spazi di Norden* N_n *ed* $\bar{N}_n$ *sono in corrispondenza conforme se gli spazi di Weyl* W_n *e* $\bar{W}_n$ *sono nella stessa corrispondenza.*

Si sa che la condizione necessaria e sufficiente perché due spazi di Weyl risultino in corrispondenza conforme è che:

$$\bar{g}_{ij} = k g_{ij} \tag{2.1}$$

(ove $k = e^{\nu}$ se g_{ij} è definito e positivo).

Se si pone:

$$\varphi^i_{jk} = \bar{\gamma}^i_{jk} - \gamma^i_{jk} \quad ; \quad t^i_{jk} = \bar{\Gamma}^i_{jk} - \Gamma^i_{jk} \quad ; \quad u^i_{jk} = \bar{G}^i_{jk} - G^i_{jk}$$

(ed anche le formole corrispondenti per: $\bar{\Gamma}\,,\bar{\gamma}\,,\bar{\zeta}$, e $\bar{G}$) siccome:

$$\Gamma^i_{jk} = \gamma^i_{jk} - \frac{1}{2}\,\zeta^i_{jk} \quad ; \quad G^i_{jk} = \gamma^i_{jk} + \frac{1}{2}\,\zeta^i_{jk}$$

abbiamo:

$$\begin{cases} \varphi^i_{jk} = \frac{1}{2}\,(t^i_{jk} + u^i_{jk}) \\ A^i_{jk} = \bar{\zeta}^i_{jk} - \zeta^i_{jk} = u^i_{jk} - t^i_{jk} \qquad \text{(con } A^i_{[jk]} = 0\text{)}. \end{cases} \tag{2.2}$$

Poiché W_n e $\bar{W}_n$ sono spazi di Weyl, si può cambiare g_{ij} in modo che:

$$\overline{\left\{ {i \atop j\ k} \right\}} = \left\{ {i \atop j\ k} \right\}$$

dunque da (1.4) si può dedurre:

$$\varphi^i_{jk} = -\,\delta^i_j\, p_k - \delta^i_k\, p_j + g_{jk}\, p^i \qquad (p_k = \bar{\omega}_k - \omega_k) \tag{2.3}$$

ove p_k, è il vettore della rappresentazione conforme che non dipende da g_{ij}.

Considerando anche le relazioni (2.2) e (2.3) si trovano le relazioni:

$$(2.4) \qquad \begin{cases} \bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \delta^i_j \, p_k - \delta^i_k \, p_j + g_{jk} \, p^i - \frac{1}{2} \, A^i_{jk} \\ \bar{G}^i_{jk} = G^i_{jk} - \delta^i_j \, p_k - \delta^i_k \, p_j + g_{jk} \, p^i + \frac{1}{2} \, A^i_{jk} \, . \end{cases}$$

Dunque per quanto precede si trova il

TEOREMA 2. *Se tra* $\bar{N}_n$ *e* N_n *esiste una corrispondenza conforme, allora tutte le trasformazioni generali sono date dalle formole* (2.4) *ove* A^i_{jk} *è un tensore arbitrario con la proprietà* $A^i_{[jk]} = 0$.

Sia L_n uno spazio con connessione affine riferito ad un sistema locale di coordinate (x^i) ed $\bar{L}_n$ uno spazio similmente con connessione affine riferito ad un sistema locale di coordinate $(\bar{x}^i)$, e siano $\gamma^i_{jk}(x)$, $\bar{\gamma}^i_{jk}(\bar{x})$ i coefficienti delle connessioni degli spazi L_n ed $\bar{L}_n$.

Supposto che fra L_n e $\bar{L}_n$ sussiste una corrispondenza biunivoca e regolare di classe C^n:

$$(3.1) \qquad \bar{x}^i = \psi^i(x^1 \cdots x^n) \quad ; \quad \det \left| \frac{\partial \psi^i}{\partial x^j} \right| \neq 0$$

si può considerare le (3.1) come un cambiamento di coordinate in L_n, cosicché i punti corrispondenti sono:

$$M(x^i)_{\in L_n} \longleftrightarrow \bar{M}(x^i)_{\in \bar{L}_n}$$

e i coefficienti delle connessioni saranno: $\gamma^i_{jk}(x)$, $\bar{\gamma}^i_{jk}(x)$.

Denominiamo questo sistema di coordinate (x^i) al quale abbiamo riferito gli spazi L_n e $\bar{L}_n$, *sistema corrispondente*.

Così, due tensori saranno denominati corrispondenti per questa applicazione se le loro componenti nel sistema corrispondente sono uguali.

Se $\gamma^i_{jk}(x) = \bar{\gamma}^i_{jk}(x)$, l'applicazione $L_n \longleftrightarrow \bar{L}_n$ sarà detta affine.

Si realizza una trasformazione di connessione se $\Gamma^i_{jk}(x) \neq \bar{\Gamma}^i_{jk}(x)$.

Due connessioni saranno dette *coparallele* se hanno lo stesso parallelismo delle direzioni e se:

$$(3.2) \qquad \bar{\gamma}^i_{jk} = \gamma^i_{jk} + 2 \, \delta^i_j \, V_k$$

ove V_k è un vettore covariante arbitrario. La relazione:

$$(3.2)' \qquad \gamma^h_{ijk} - \frac{1}{n} \, \delta^h_i \, B_{jk} = \vartheta^h_{ijk}$$

è un invariante per le trasformazioni (3.2) di connessione.

Da (3.2) si deduce che se γ^i_{jk} e $\bar{\gamma}^i_{jk}$ sono anche simmetriche $\bar{\gamma}^i_{jk} = \gamma^i_{jk}$, l'applicazione precedente è affine. Questa proprietà è reciproca. La condizione necessaria e sufficiente perché fra gli spazi W_n e $\bar{W}_n$ sussista una corrispondenza biunivoca regolare è espressa dalle (2.1).

Se γ^i_{jkl}, $\overline{\gamma}^i_{jkl}$ sono i tensori di curvatura, B_{kl}, $\overline{B}_{kl}$ i tensori di Bianchi e $\gamma^i_{jkl} = \overline{\gamma}^i_{jkl}$ nei punti corrispondenti, allora:

$$\mathfrak{I}^i_{jkl} = \overline{\mathfrak{I}}^i_{jkl}.$$

Siccome per uno spazio W_n di Weyl sussiste la relazione:

$$g_{ij;k} = 2\,\omega_k\, g_{ij},$$

scrivendo le condizioni di completa integrabilità abbiamo:

$$(3.3) \qquad \mathfrak{I}^h_{jkl}\, g_{hi} + \mathfrak{I}^h_{ikl}\, g_{hi} = 0 \quad ; \quad \overline{\mathfrak{I}}^h_{jkl}\, \overline{g}_{hi} + \overline{\mathfrak{I}}^h_{ikl}\, \overline{g}_{hj} = 0.$$

Siccome:

$$\mathfrak{I}^h_{jkl} = \overline{\mathfrak{I}}^h_{jkl}$$

abbiamo:

$$(3.4) \qquad \mathfrak{I}^h_{jkl}\, \overline{g}_{hi} + \mathfrak{I}^h_{ikl}\, \overline{g}_{hj} = 0$$

Quindi nell'ipotesi che $X_{kl} = \| \mathfrak{I}^h_{jkl} \|$ sia un sistema di trasformazioni lineari irriducibile, in tal caso il sistema:

$$(3.5) \qquad \mathfrak{I}^h_{jkl}\, X_{hi} + \mathfrak{I}^h_{ikl}\, X_{hj} = 0$$

è compatibile con soluzioni determinate all'infuori di un fattore.

Siccome la (3.5) è verificata da g_{ij} e $\overline{g}_{ij}$ segue che:

$$(3.6) \qquad \overline{g}_{ij} = e^{2\nu}\, g_{ij}$$

e quindi segue il

TEOREMA 3. *Se i tensori di curvatura* γ^i_{jkl}, $\overline{\gamma}^i_{jkl}$ *sono corrispondenti, allora* W_n *e* $\overline{W}_n$ *sono in corrispondenza conforme ed abbiamo la relazione* (2.4) *per gli spazi* N_n, $\overline{N}_n$.

4. – Ammettiamo che nei punti corrispondenti abbiamo $\gamma^i_{jkl} = \overline{\gamma}^i_{jkl}$.

Calcolando $\gamma^i_{jkl;m}$, $\overline{\gamma}^i_{jkl;\overline{m}}$ e tenendo presenti le identità di Bianchi, abbiamo:

$$(4.1) \qquad \gamma^s_{jkl}\, \varphi^i_{sm} + \gamma^s_{jlm}\, \varphi^i_{sk} + \gamma^s_{jmk}\, \varphi^i_{sl} = \gamma^i_{skl}\, \varphi^s_{jm} + \gamma^i_{slm}\, \varphi^s_{jk} + \gamma^i_{smk}\, \varphi^s_{jl},$$

e tenendo conto di (2.3), la relazione precedente diventa:

$$(4.2) \qquad \delta^i_m\, \gamma^s_{jkl}\, p_s + \delta^i_k\, \gamma^s_{jlm}\, p_s + \delta^i_l\, \gamma^s_{jmk}\, p_s = \gamma^s_{jkl}\, g_{sm}\, p^i + \gamma^s_{jlm}\, g_{sk}\, p^i +$$
$$+ \gamma^s_{jmk}\, g_{sl}\, p^i - (\gamma^i_{skl}\, g_{jm}\, p^s + \gamma^i_{slm}\, g_{jk}\, p^s + \gamma^i_{smk}\, g_{jl}\, p^s)$$

ove si è posto: $p^i = g^{ir}\, p_r$.

Moltiplicando la (4.2) per g^{jl} e sommando rispetto a j ed l, segue che:

$$\delta_m^i \gamma^s_{\cdot k \cdot} p_s - \delta_k^i \gamma^s_{\cdot m \cdot} p_s - g^{ij} \gamma^s_{jkm} p_s = \gamma^s_{\cdot k \cdot} g_{sm} p^i - \tag{4.3}$$

$$- \gamma^s_{\cdot m \cdot} g_{sk} p^i + B_{mk} p^i + (n-2) \gamma^i_{skm} p^s ,$$

ove si è posto $\gamma^s_{\cdot k \cdot} = \gamma^s_{jkl} g^{jl}$, e ove $B_{mk} = \gamma^i_{imk}$ è il tensore di Bianchi.

Se adesso si introduce la contrazione $i = m$, is ha:

$$n\gamma^s_{\cdot k \cdot} p_s - \gamma^s_{\cdot k \cdot} p_s - \gamma^s_{\cdot k \cdot} p_s = \gamma^s_{\cdot k \cdot} p_s - \gamma^s_{\cdot m \cdot} g_{sk} p^m + B_{mk} p^m + (n-2) R_{sk} p^s , \tag{4.4}$$

ove R_{sk} è il tensore di Ricci.

Siccome:

$$B_{mk} = R_{km} - R_{mk}$$

abbiamo che:

$$(n-3) \gamma^s_{\cdot k \cdot} p_s + \gamma^s_{\cdot m \cdot} g_{sk} p^m - (n-3) R_{mk} p^m - R_{km} p^m = 0$$

o anche:

$$[(n-3) \gamma^s_{\cdot m \cdot} + \gamma^r_{\cdot m \cdot} g_{rk} g^{ms} - (n-3) R_{mk} g^{ms}] p^s = 0 \tag{4.5}$$

donde si ricava subito il seguente

TEOREMA 4. *Se due spazi* W_n *e* $\overline{W}_n$ *hanno nei punti corrispondenti* $\gamma^i_{jkl} = \overline{\gamma}^i_{jkl}$ *con* $n \geq 3$ *ed il rango* $\| A^{s\cdot}_{k} \| = n$, *allora* W_n *e* $\overline{W}_n$ *sono coparalleli*. (Con $\| A^s_k \|$ si è denotata la matrice di (4.5)).

Se $W_n = V_n$ e $\overline{W}_n = \overline{V}_n$, ove V_n e $\overline{V}_n$ sono spazi riemanniani, tenendo conto che $B_{mk} = 0$, emerge facilmente la seguente relazione:

$$R_{mk} = R_{km}$$

$$R_{mk} p^m = - \gamma^s_{\cdot k \cdot} p_s$$

$$\gamma^s_{\cdot m \cdot} g_{sk} p^m = \gamma^s_{\cdot k \cdot} p_s$$

dunque la (4.5) diventa:

$$2(n-2) \gamma^s_{\cdot k \cdot} p_s = 0 \tag{4.6}$$

e visto il teorema 4, se il rang $\| \gamma^s_{\cdot k \cdot} \| = n$, abbiamo $p_s = 0$ e quindi anche V_n e $\overline{V}_n$ sono coparalleli; e riesce $\bar{g}_{ij} = k g_{ij}$, con $k =$ costante.

5. – Se ora si pone la definizione:

Due spazi di Norden N_n e $\overline{N}_n$ son detti coparalleli se gli spazi di Weyl W_n e $\overline{W}_n$ corrispondenti sono coparalleli, tenendo conto del teorema che se $\overline{W}_n$ e W_n sono coparalleli sono anche in corrispondenza conforme, abbiamo subito il

TEOREMA 5. *Se due spazi di Norden* N_n *e* $\overline{N}_n$ *sono coparalleli essi sono anche conformi.*

Se N_n e $\bar{N}_n$ sono coparalleli, poiché $\varphi^i_{jk} = 0$ risulta $u^i_{jk} = -t^i_{jk}$ e tenendo conto delle relazioni (2.4), abbiamo anche:

$$(5.1) \qquad \begin{cases} \bar{\Gamma}^i_{jk} = \Gamma^i_{jk} - \frac{1}{2} A^i_{jk} \\ \bar{G}^i_{jk} = G^i_{jk} + \frac{1}{2} A^i_{jk} \end{cases}$$

dalla quale segue il

TEOREMA 6. *Le trasformazioni di connessione tra due spazi* N_n *e* $\bar{N}_n$, *sono individuate dalle* (5.1) *ove* A^i_{jk} *è un arbitrario tensore e* $A^i_{[jk]} = 0$; $g_{hi} A^i_{jk} = g_{ji} A^i_{hk}$.

BIBLIOGRAFIA.

[1] A. NORDEN, *Prostrastva affinoi sviaznosti*, Moskva 1950.

[2] R. MIRON, *Sur les espaces à connexions conjuguées au sens de Norden*, «Anal. Univ.», Iassy 1963 (Roumanie).