Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Paolo Santoro

Sull'equazione funzionale quasi-lineare $u(x) + p(x) = y$ fra spazi di Banach

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **46** (1969), n.4, p. 348–352.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_4_348_0>

Equazioni differenziali. — *Sull'equazione funzionale quasi-lineare* $u(x) + p(x) = y$ *fra spazi di Banach* (*). Nota di PAOLO SANTORO, presentata (**) dal Socio G. SANSONE.

SUMMARY.—The mapping $y = u(x) + p(x)$ of a Banach space X into Banach space Y is considered. A theorem by L.M. Graves ensures the existence of a solution of the equation $y = u(x) + p(x)$ for fixed y without assuming the existence of u^{-1}. Theorem 1 of this paper generalizes such a result; theorem 2 gives a condition for the uniqueness.

Un'equazione funzionale fra spazi di Banach X, Y : $f(x) = y$, si presenta spesso nella forma

$$u(x) + p(x) = y \tag{E}$$

con u lineare.

Nel trattare l'equazione (E) distinguiamo il caso in cui esiste u^{-1}. Allora la risoluzione di (E) può essere ricondotta (cfr. n. 1) alla ricerca di punti uniti della trasformazione $Tx = u^{-1}(y) - u^{-1}(p(x))$ di X in sè.

Un teorema di esistenza che non presuppone l'esistenza di u^{-1} è stato dato da Graves [1] e noi ci proponiamo di generalizzare detto teorema, (cfr. n. 2 teorema 1). Osserveremo, poi, che l'esistenza di u^{-1} in aggiunta ad altre ipotesi (teorema 2) garantisce l'unicità della soluzione.

Osserviamo infine che i teoremi 1 e 2 possono anche essere interpretati come teoremi di rappresentazione di un intorno in X in una sfera aperta in Y.

1. Data una trasformazione u lineare di X in Y indichiamo con D il dominio di u e con R il codominio; in tutto il seguito supporremo che il dominio D di u sia un sottospazio lineare di X.

Utile nel seguito ci sarà il seguente teorema, noto come Lemma di Banach ([2] p. 46): *Sia* $y = u(x)$ *una trasformazione lineare chiusa il cui codominio sia di seconda categoria in* Y, *allora*

1) $R = Y$,

2) *esiste una costante* $m > 0$ *tale che per ogni* $y \subset Y$ *vi è una* $x \in D$ *con* $y = u(x)$ *e* $\|x\| \leq m \|y\|$,

3) *se* u^{-1} *esiste è limitata.*

In particolare vale il

COROLLARIO: *Se* $u(x)$ *è una trasformazione lineare suriettiva continua di* X *su* Y *allora esiste un numero* m *tale che per ciascuna* $y \in Y$ *esiste una* $x \in X$

(*) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei gruppi di ricerca matematici del C.N.R. per l'anno 1967–68 (gruppo 11).

(**) Nella seduta del 19 aprile 1969.

per cui $y = u(x)$ *e* $\| x \| < m \| y \|$. *Se infine* u *è un omeomorfismo lineare si può prendere* $m = \| u^{-1} \|$.

Sia $p(x)$ una trasformazione (non necessariamente lineare) definita su X e a valori in Y, e consideriamo l'equazione (E).

Notiamo subito che se u è chiusa ed u^{-1} esiste, allora trovare una soluzione di (E) equivale a trovare un punto unito della trasformazione T di X in sè così definita $Tx = u^{-1}(y) - u^{-1}(p(x))$. Infatti se x^0 è un punto unito della trasformazione, se cioè $x^0 = Tx^0$, si ha $x^0 \in D$, e ciò in forza del lemma di Banach $u^{-1}(y) \in D$, qualunque sia $y \in Y$, ed $u^{-1}(p(x)) \in D$ qualunque sia $x \in X$. E quindi $u(x^0) = u(Tx^0) = y - p(x^0)$.

Da questa osservazione discende che un qualunque teorema che garantisca l'esistenza di un punto unito della trasformazione T garantisce anche l'esistenza di una soluzione di (E).

Così ad esempio, posto $u^{-1}(y) = \xi$, se $p(x)$ è una trasformazione completamente continua, anche $\xi - u^{-1}(p(x))$ è completamente continua allorché y è fissato ovvero ξ è fissato. Come conseguenza del teorema di Schauder si ha allora:

Sia u *come nell'ipotesi del lemma di Banach ed esista* u^{-1} *e sia* m *la costante per* u *come nel lemma. Sia* S *la sfera chiusa* $\| x \| \leq \gamma$ *e sia* $\sup_{x \in S} \| p(x) \| = d$, *con* d *tale che* $(\gamma - md) > 0$. *Se* $p(S)$ *è un compatto in* Y *allora per ogni* $y \in Y$ *e tale che* $\| y \| < (\gamma - md)/m$ *esiste almeno un punto* x *che soddisfa* (E).

Infatti in tal caso $\| Tx \| = \| u^{-1}(y) - u^{-1}(p(x)) \| < \gamma$, ed essendo TS un compatto segue l'asserto.

Analogamente se $p(x)$ soddisfa una condizione di Lipschitz $\| p(x) - p(x') \| \leq L \| x - x' \|$ si ha che $\| Tx - Tx' \| = \| u^{-1}(p(x) - p(x')) \| < mL \| x - x' \|$ e se $mL < 1$ si ha un criterio di esistenza di un punto fisso analogo al teorema di Banach sulle contrazioni.

2. Definiamo per ogni funzione reale di variabile reale φ e per ogni α reale positiva la successione di funzioni

$$\Psi^1_\alpha(r) = \varphi(\alpha r) \text{ qualunque sia } r \text{ reale}$$

$$\Psi^{n+1}_\alpha(r) = \Psi^n_\alpha \circ \Psi^1_\alpha \quad \text{qualunque sia } n \geq 1$$

e diciamo che φ soddisfa l'ipotesi (H_α) se

i) φ è non decrescente per $r \geq 0$ e $\varphi(0) = 0$

ii) esiste un $\alpha > 0$ ed un $r > 0$ tale che $\sum_{n \geq 1} \Psi^n_\alpha(r) < \infty$.

Supponiamo che φ soddisfi l'ipotesi (H_α) e sia $I_\alpha = [0, r_1[$ tale che

$$\sum_{n \geq 1} \Psi^n_\alpha(r) < \infty \qquad \text{per ogni } r \in I_\alpha .$$

Poniamo allora in I_α

$$\Psi_\alpha(r) = \sum_{n \geq 1} \Psi^n_\alpha(r)$$

seguono immediatamente alcune considerazioni: Ψ_α è non decrescente in I_α, $\Psi_\alpha(0) = 0$. Inoltre se φ soddisfa l'ipotesi (H_α): essa soddisfa anche l'ipotesi $(H_{\alpha'})$ per ogni $\alpha' \in]0, \alpha]$ e per $I_{\alpha'} \subset I_\alpha$ è $\Psi_{\alpha'}(r) \leq \Psi_\alpha(r)$ per $r \in I_{\alpha'}$. È $\varphi(\alpha r) < r$ per $r \in I_\alpha$; infine se φ è anche continua in $[0, \infty[$ allora Ψ_α è continua in I_α.

La funzione qr per ogni q tale che $0 < q < \alpha$ soddisfa l'ipotesi (H_α) con $\alpha < 1$.

Ciò detto dimostriamo il seguente

TEOREMA 1. *Sia u una trasformazione lineare che soddisfi le ipotesi del lemma di Banach, e sia m la costante come in detto lemma per la u. Sia $p(x)$ una trasformazione continua (non necessariamente lineare) a valori in* Y, *definita per $\|x\| < \gamma$, (con γ un numero reale positivo), $p(0) = 0$ e tale che*

$$\|p(x_1) - p(x_2)\| \leq \varphi(\|x_1 - x_2\|) \qquad \|x_1\| < \gamma\,,\ \|x_2\| < \gamma \tag{1}$$

essendo φ una funzione reale soddisfacente l'ipotesi (H_m) con m come detto.

Per ogni y tale che $\Psi_m(\|y\|) + \|y\| < \gamma/m$ l'equazione (E) *ha almeno una soluzione x con $\|x\| < \gamma$.*

Dimostrazione: Consideriamo le successioni $\{y_n\}$ in Y e $\{x_n\}$ in X ottenute alternando le formule

a) $$y_{n-1} = u(x_n - x_{n-1})$$

b) $$y_n = -p(x_n) + p(x_{n-1})$$

assegnato $x_0 = 0$ ed $y_0 = y$. Da a) e dall'ipotesi su u, x_n è preso per ogni n in modo che

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq m\|y_{n-1}\|. \tag{2}$$

Da b) e da (1) si ha $\|y_n\| \leq \varphi(\|x_n - x_{n-1}\|)$ quando $\|x_n\| < \gamma$ e $\|x_{n-1}\| < \gamma$.

Per induzione, ricordando (2), si ottiene

$$\|x_n - x_{n-1}\| \leq m\Psi_m^{n-1}(\|y\|) \tag{3}$$

$$\|y_n\| \leq \Psi_m^n(\|y\|). \tag{4}$$

Da queste, per l'ipotesi su y, si ottiene

$$\|x_n\| \leq \sum_{1\leq k\leq n} \|x_k - x_{k-1}\| \leq m\left(\sum_{k\geq 1} \Psi_m^k(\|y\|) + \|y\|\right) < \gamma.$$

Da (3) e (4) segue inoltre

$$\|x_{n+i} - x_n\| \leq \sum_{1\leq k\leq i} \|x_{n+k} - x_{n+k-1}\| \leq m \sum_{1\leq k\leq i} \Psi^{n+k-1}(\|y\|)$$

e quindi la successione è di Cauchy e per la completezza di X, essa converge ad un elemento x tale che $\|x\| < \gamma$, e segue anche che $y_n \to 0$ per $n \to \infty$.

Da a) e b) sottraendo membro a membro si ha

$$y_{n-1} - y_n = u(x_n) + p(x_n) - [u(x_{n-1}) + p(x_{n-1})]$$

e sommando per $n = 1, 2, \cdots, k$, si ha

$$y - y_k = u(x_k) + p(x_k), \tag{5}$$

per $k \to \infty$ si ha che il limite x della successione $\{x_n\}$ è soluzione dell'equazione (E).

Nota 1. Nel caso che $\varphi(r) = \delta r$ con $\delta m < 1$ ed u è continua si ha il teorema di L. M. Graves.

Nota 2. L'ipotesi $p(0) = 0$ nell'enunciato del teorema 1 può essere eliminata purché si considerino y tali che

$$m[\Psi_m(\|y - p(0)\|) + \|y - p(0)\|] < \gamma.$$

Infatti prendendo in a) e b) $y_0 = y - p(0)$ ed $x_0 = 0$ e ripetendo i ragionamenti, segue l'asserto.

TEOREMA 2. *Nell'ipotesi del teorema* 1, *se inoltre esiste* u^{-1} *e se* φ *oltre che soddisfare l'ipotesi* (H_m) *è tale che* $m\varphi(r) < r$ *allora la soluzione dell'equazione* (E) *è unica.*

Se infatti esistessero due valori x_1 ed x_2 con $\|x_1\| < \gamma$ e $\|x_2\| < \gamma$ che soddisfano l'equazione si avrebbe

$$x_1 = u^{-1}(y - p(x_1)) \qquad x_2 = u^{-1}(y - p(x_2))$$

e quindi per l'ipotesi su φ

$$\|x_1 - x_2\| \leq m\|p(x_1) - p(x_2)\| \leq m\varphi(\|x_1 - x_2\|) < \|x_1 - x_2\|$$

e ciò è assurdo.

Osservazione. Valgono in corrispondenza dei teoremi 1 e 2 enunciati analoghi come teoremi di rappresentazione ed esattamente:

TEOREMA 3. *Sia* u *come nell'enunciato del teorema* 1. *Sia* $p(x)$ *una funzione definita su* X *a valori in* Y *tale che*

$$\|p(x_1) - p(x_2)\| \leq \varphi(\|x_1 - x_2\|) \qquad x_1 \in X \qquad x_2 \in X$$

e sia $p(0) = 0$.

Se inoltre φ *è continua e gode della proprietà* (H_m) *allora esistono un intorno aperto* V *di* 0 *in* X *ed una sfera aperta* W *in* Y *di centro* 0 *tali che la restrizione di*

$$f(x) = u(x) + p(x)$$

a V *rappresenta* V *su* W.

Se inoltre u *è un omeomorfismo ed è* $m\varphi(r) < r$ *allora* f *rappresenta biunivocamente* V *in* W.

Dimostrazione. Per quanto osservato la continuità di φ implica che Ψ_m è continua in un intervallo I_m, tenuto conto che $\Psi_m(0) = 0$ si ha che fissato opportunamente $\gamma > 0$ esiste $\sigma(\gamma)$ tale che per $\|y\| < \sigma(\gamma)$ è $\Psi_m(\|y\|) + \|y\| < \gamma/m$.

Allora per il teorema 1, per ogni y tale che $\|y\| < \sigma(\gamma)$ esiste una $x \in X$ con $\|x\| < \gamma$ per cui è $y = u(x) + p(x)$. Indicato allora con W la sfera aperta in Y di centro o e raggio $\sigma(\gamma)$, essendo f iniettiva e continua, l'insieme $V = f^{-1}(w)$ contenuto nella sfera $\|x\| < \gamma$ è un aperto e la restrizione di f a V rappresenta V in W. Se poi u è un omeomorfismo ed $m\varphi(r) < r$ la biunivocità della rappresentazione di V su W segue dal teorema 2.

BIBLIOGRAFIA.

[1] L. M. GRAVES, *Some Mapping Theorems*, «Duke Math. J.», 111–114 (1950).
[2] E. HILLE e R. S. PHILLIPS, *Functional analysis and semi-groups*, «Amer, Math. Soc. Col. Publ.», *31* (1957).