Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Sergis Bruno, Mario Castagnino

Complemento alla nota: «Una proprietà caratteristica per la linearità delle connessioni di Kawaguchi»

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **46** (1969), n.4, p. 367–368.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_4_367_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

Geometria. — *Complemento alla nota: «Una proprietà caratteristica per la linearità delle connessioni di Kawaguchi».* Nota di SERGIS BRUNO e MARIO CASTAGNINO, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

SUMMARY. — Complementary remarks on a previous theorem by the same authors, according to which: « In a differentiable manifold, endowed with a Kawaguchi connection, the derivative of a tensor (of rank ≥ 2) is a tensor if, and only if, the connection is a linear one ».

Nella Nota [1] ci siamo proposti di provare il teorema seguente:

Condizione necessaria e sufficiente perché, per ogni tensore (T^{ij}), (di una varietà differenziabile V_n, $n \geq 2$) *le* $\delta_k T^{ij}$ (derivate covarianti) *siano le componenti di un tensore è che*:

$$\omega_i^j(x, v) = \Gamma_{ik}^j v^k ,$$

dove Γ_{jk}^i *sono le componenti di una connessione lineare.*

Come il prof. A. Kawaguchi ci ha fatto gentilmente osservare, la formula (17) non discende senz'altro dalla precedente. Ci sembra pertanto opportuno, in questa Nota, esporre con tutti i dettagli la parte finale della dimostrazione del suddetto teorema, completando così il suddetto passaggio.

Dalle formule (7), (15) e (16) del lavoro [1] segue:

$$\overset{i'}{a}_m \overset{j'}{a}_n \overset{h}{a}_{k'} [\omega_h^m (x, T^{*n}) + \omega_h^n (x, T^{m*})] =$$
$$= \overset{i'}{a}_m \overset{h}{a}_{k'} \omega_h^m (x, \overset{j'}{a}_i T^{*i}) + \overset{j'}{a}_m \overset{h}{a}_{k'} \omega_h^m (x, \overset{i'}{a}_j T^{j*}) .$$

Contraendo con $\overset{k'}{a}_{\bar{h}}$, $\overset{\bar{r}}{a}_{i'}$, $\overset{\bar{s}}{a}_{j'}$ si ha:

$$\omega_{\bar{h}}^{\bar{r}} (x, T^{*\bar{s}}) + \omega_{\bar{h}}^{\bar{s}} (x, T^{\bar{r}*}) = \overset{\bar{s}}{a}_{j'} \omega_{\bar{h}}^{\bar{r}} (x, \overset{j'}{a}_i T^{*i}) + \overset{\bar{r}}{a}_{i'} \omega_{\bar{h}}^{\bar{s}} (x, \overset{i'}{a}_j T^{j*}) .$$

Ponendo, per semplicità di scrittura, r, s, h, a_i^j, $\dot{a}_j^i$, rispettivamente al posto di $\bar{r}$, $\bar{s}$, $\bar{h}$, $\overset{j'}{a}_i$, $\overset{i}{a}_{j'}$ si ha:

$$(1) \qquad \omega_h^r | (x, T^{*s}) + \omega_h^s (x, T^{r*}) = \dot{a}_j^s \omega_h^r (x, a_i^j T^{*i}) + \dot{a}_i^r \omega_h^s (x, a_j^i T^{j*}).$$

Assumiamo, data l'arbitrarietà di $\| a_i^j \|$, che sia:

$$a_i^j = \delta_i^j + \varepsilon_i^j ,$$

(*) Nella seduta del 19 aprile 1969.

(1) SERGIS BRUNO E MARIO CASTAGNINO, « Rend. Accad. Naz. Lincei », Serie VIII, Vol. XLIV, fasc. 1, (1968) p. 54.

ove ε_i^j è un infinitesimo. Per la matrice $\| \overset{\prime}{a}{}_j^i \|$, inversa di $\| a_i^j \|$, si ha allora:

$$\overset{\prime}{a}{}_j^i = \delta_j^i - \varepsilon_j^i .$$

Onde la (1) diventa:

$$\begin{aligned} & \omega_h^r(x\,,\mathrm{T}^{*s}) + \omega_h^s(x\,,\mathrm{T}^{r*}) = \\ & = (\delta_j^s - \varepsilon_j^s)\,[\omega_h^r(x\,,\mathrm{T}^{*j}) + \omega_{hp}^r(x\,,\mathrm{T}^{*j})\,\varepsilon_i^j\,\mathrm{T}^{pi}] + \\ & + (\delta_i^r - \varepsilon_i^r)\,[\omega_h^s(x\,,\mathrm{T}^{i*}) + \omega_{hp}^s(x\,,\mathrm{T}^{i*})\,\varepsilon_j^i\,\mathrm{T}^{jp}] , \end{aligned}$$

cioè

$$\begin{aligned} & \varepsilon_i^s\,[\omega_{hp}^r(x\,,\mathrm{T}^{*s})\,\mathrm{T}^{pi} - \omega_h^r(x\,,\mathrm{T}^{*i})] + \\ & + \varepsilon_j^r\,[\omega_{hp}^s(x\,,\mathrm{T}^{r*})\,\mathrm{T}^{jp} - \omega_h^s(x\,,\mathrm{T}^{j*})] = 0 . \end{aligned}$$

Prendiamo $s \neq r$, $\varepsilon_j^s \neq 0$ e $\varepsilon_k^t = 0$ per $t \neq s$ o $k \neq i$, risulta allora:

$$\omega_h^r(x\,,\mathrm{T}^{*i}) = \omega_{hp}^r(x\,,\mathrm{T}^{*s})\,\mathrm{T}^{pi} .$$

Sia ora $i \neq s$. Per semplicità chiamiamo:

$$\mathrm{T}^{*i} = v^* \qquad \text{e} \qquad \mathrm{T}^{*s} = w^*,$$

dunque si ha:

$$\omega_h^r(x\,,v^*) = \omega_{hp}^r(x\,,w^*)\,v^p .$$

Derivando rispetto a w^* otteniamo:

$$\frac{\partial}{\partial w^q}\,\omega_{hp}^r(x\,,w^*)\,v^p = 0 ,$$

essendo v^p arbitrario, si ha infine:

$$\frac{\partial}{\partial \omega^q}\,\omega_{hp}^r(x\,,w^*) = 0 ,$$

cioè le $\omega_{hp}^r(x\,,w^*) = \Gamma_{hp}^r$ sono indipendenti dalle w^*. Ne segue dunque l'asserto.