
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIAMBATTISTA SCARPI

Onde provocate da moti periodici del fondo di un canale

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 46 (1969), n.4, p. 408–416.

Accademia Nazionale dei Lincei

[<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_4_408_0>](http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_4_408_0)

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Idrodinamica. — *Onde provocate da moti periodici del fondo di un canale.* Nota di GIAMBATTISTA SCARPI (*), presentata (**) dal Socio G. SUPINO.

SUMMARY. — The first order approximation study of waves generated in a channel by motion of its bottom is carried out, to find the analytic expression of the free surface. We are interested to a movement of the bottom which is a travelling wave with exponentially decreasing amplitude.

1. — I problemi riguardanti l'insorgere di fenomeni ondosi in un canale sono stati — e sono tutt'ora — largamente studiati sia nel caso che il moto sia indotto dallo spostamento di una parete verticale (battente) [1] [2] [3], sia che esso derivi da particolari condizioni iniziali imposte al pelo libero [4] [5], sia infine che esso venga causato da spostamenti del fondo [3]; in quest'ultimo caso si può pensare che tale studio sia utile per avvicinarsi all'esame di fenomeni reali che potrebbero essere originati da movimenti sismici; è

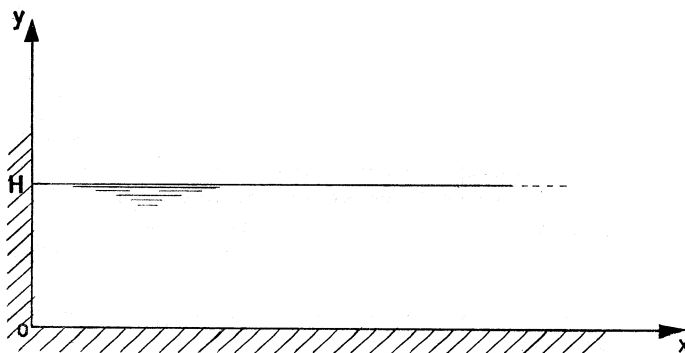


Fig. 1

nostra intenzione eseguire un esame di due tipi possibili di movimenti del fondo (periodici nel tempo), determinando il fenomeno ondoso da essi generato. Limiteremo lo studio alla prima approssimazione, utilizzando lo schema matematico di liquido perfetto in moto piano irrotazionale, per cui esisterà il potenziale $\varphi(x, y, t)$ della velocità, tale che, se u e v sono le componenti della velocità nelle direzioni x, y rispettivamente (ved. fig. 1), sarà

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad , \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} .$$

(*) Istituto di Idraulica della Facoltà di Ingegneria dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 19 aprile 1969.

Con le ipotesi fatte, discende dall'equazione di continuità che φ deve soddisfare — come noto — l'equazione:

$$(1) \quad \Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

con la condizione di Poisson al pelo libero ($y = H$):

$$(2) \quad g \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

e con le condizioni al fondo e alla parete verticale:

$$(3) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = v = f(x, t) \quad (x \geq 0, y = 0)$$

$$(4) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = u = 0 \quad (x = 0, 0 \leq y \leq H)$$

dove nella (3), se $g(x, t)$ è la legge che descrive la forma del fondo del canale, sarà $f(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} g(x, t)$.

2. — *Primo caso.*

Supponiamo che la funzione $f(x, t)$ che compare nella (3) sia

$$(5) \quad f(x, t) = Ae^{-\lambda x} \cos Kt$$

con A, λ, K costanti assegnate; cioè il fondo si solleva periodicamente nel tempo, con un'oscillazione la cui ampiezza decresce allontanandosi dall'origine, e tende a zero a distanza infinita.

Consideriamo la funzione potenziale

$$(6) \quad \varphi(x, y, t) = -\frac{A_0}{m_0} \operatorname{Ch} m_0 y \sin(Kt - m_0 x) - \\ - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p}{\lambda_p} e^{-\lambda_p x} \cos \lambda_p y \cos Kt + \frac{B}{\lambda} e^{-\lambda x} \cos \lambda(y+r) \cos Kt$$

dove $A_0, A_p, m_0, \lambda_p, r, B$ sono costanti da determinare.

È immediato verificare che la (6) soddisfa la (1); la (2) resta verificata se risulta

$$(7) \quad gm_0 \operatorname{Th} m_0 H = K^2$$

$$(8) \quad -g\lambda_p \operatorname{tg} \lambda_p H = K^2$$

$$(9) \quad -g\lambda \operatorname{tg} \lambda (H+r) = K^2.$$

La (7) determina un solo valore di m_0 , mentre la (8) dà tutta una successione di infiniti valori positivi per λ_p , per cui è giustificato il segno di sommatoria nella (6); la (9) permette di determinare il valore di $\operatorname{tg} \lambda (H+r)$, e quindi di $\operatorname{tg} \lambda r$.

La condizione (3) ci dà, con la (6), tenendo conto della (5)

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = -B \sin \lambda r e^{-\lambda x} \cos Kt = A e^{-\lambda x} \cos Kt$$

cioè $-B \sin \lambda r = A$, e quindi resta determinato

$$(10) \quad B = \frac{-A}{\sin \lambda r} \quad (1).$$

La (10), con facili deduzioni dalla (9), può essere posta nella forma

$$(11) \quad B = -\frac{A \sqrt{K^4 + g^2 \lambda^2}}{g \lambda \sin \lambda H - K^2 \cos \lambda H}.$$

L'ultima condizione cui deve soddisfare φ , la (4), ci dà

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=0} = A_0 \operatorname{Ch} m_0 y \cos Kt + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cos \lambda_p y \cos Kt - B \cos \lambda(y+r) \cos Kt = 0$$

che fornisce la seguente relazione da soddisfare nell'intervallo $0 \leq y \leq H$:

$$(12) \quad A_0 \operatorname{Ch} m_0 y + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cos \lambda_p y = B \cos \lambda(y+r).$$

Ma $\operatorname{Ch} m_0 y$, $\cos \lambda_p y$, costituiscono un sistema completo di funzioni ortogonali nell'intervallo $0 \leq y \leq H$, come autofunzioni dell'equazione

$$f_p'' + \mu_p f_p = 0$$

con le condizioni $g f_p'(H) - K^2 f_p(H) = 0$; allora possiamo esprimere per loro tramite il secondo membro di (12). I coefficienti A_0 , A_p , sono dati dalle formule seguenti:

$$(13) \quad A_0 = B \frac{\int_0^H \operatorname{Ch} m_0 y \cos \lambda(y+r) dy}{\int_0^H \operatorname{Ch}^2 m_0 y dy}$$

$$(14) \quad A_p = B \frac{\int_0^H \cos \lambda_p y \cos \lambda(y+r) dy}{\int_0^H \cos^2 \lambda_p y dy}$$

(1) Notiamo che conoscendo $\operatorname{tg} \lambda r$, resta l'incertezza sul segno di $\sin \lambda r$; ma questo non ha alcuna importanza, dato che si sceglie $\sin \lambda r > 0$ risulta $B < 0$, e se si sceglie $\sin \lambda r < 0$ è $B > 0$ (supposto $A > 0$).

che danno rispettivamente

$$(13') \quad A_0 = \frac{2 B m_0}{\lambda^2 + m_0^2} \frac{m_0 \operatorname{Sh} z_0 \sin \zeta_0 - \lambda \operatorname{Ch} z_0 \cos \zeta_0 + \lambda \cos \lambda r}{z_0 + \operatorname{Sh} z_0 \operatorname{Ch} z_0}$$

$$(14') \quad A_p = \frac{2 B \lambda_p}{\lambda^2 - \lambda_p^2} \frac{\lambda \cos z_p \cos \zeta_0 + \lambda_p \sin z_p \sin \zeta_0 - \lambda \cos \lambda r}{z_p + \sin z_p \cos z_p}$$

ove si è posto $z_0 = m_0 H$, $\zeta_0 = \lambda(H + r)$, $z_p = \lambda_p H$. Quindi la φ data da (6) risolve il problema posto. La sopraelevazione del pelo libero è data da

$$(15) \quad \eta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{y=H} = - \frac{A_0 K}{m_0 g} \operatorname{Ch} m_0 H \cos (Kt - m_0 x) + \\ + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{A_p K}{\lambda_p g} e^{-\lambda_p x} \cos \lambda_p H \sin Kt + \frac{B K}{\lambda g} \cos \lambda (H + r) \sin Kt.$$

Vi è quindi un'onda che si propaga con velocità k/m_0 , di ampiezza costante, e inoltre una successione di onde stazionarie la cui ampiezza decresce con legge esponenziale allontanandosi dalla parete verticale.

3. - Secondo caso.

Supponiamo che la $f(x, t)$ che compare nella (3) sia data da

$$(16) \quad f(x, t) = A e^{-\lambda x} \cos (Kt - \sigma x) + B e^{-\lambda x} \sin (Kt - \sigma x).$$

Cioè il fondo si muove seguendo un'onda sinusoidale che avanza con velocità K/σ assegnata, la cui ampiezza va smorzandosi esponenzialmente con la distanza. Assumiamo la seguente funzione come potenziale di velocità:

$$(17) \quad \varphi(x, y, t) = - \operatorname{Ch} m_0 y \left[\frac{A_0}{m_0} \sin (Kt - m_0 x) - \frac{B_0}{m_0} \cos (Kt - m_0 x) \right] - \\ - \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\lambda_p x} \cos \lambda_p y \left[\frac{A_p}{\lambda_p} \cos Kt + \frac{B_p}{\lambda_p} \sin Kt \right] + \\ + e^{-\lambda x} \{ \cos (Kt - \sigma x) [C \operatorname{Ch} \sigma(y+r) \cos \lambda(y+s) + D \operatorname{Sh} \sigma(y+r) \sin \lambda(y+s)] + \\ + \sin (Kt - \sigma x) [C \operatorname{Sh} \sigma(y+r) \sin \lambda(y+s) - D \operatorname{Ch} \sigma(y+r) \cos \lambda(y+s)] \},$$

essendo $A_0, B_0, A_p, B_p, m_0, \lambda_p, C, D, r, s$ costanti da determinare, mentre sono assegnate K, σ e λ .

La (17) soddisfa la (1), come si può verificare; la condizione di Poisson (2) dà luogo alle seguenti relazioni:

$$(7') \quad g m_0 \operatorname{Th} m_0 H = K^2$$

$$(8') \quad -g \lambda_p \operatorname{tg} \lambda_p H = K^2$$

analoghe alle (7) e (8) del paragrafo precedente, e in più fornisce il seguente sistema:

$$(18) \quad \begin{cases} g\sigma \operatorname{Th} \sigma(H+r) - g\lambda \operatorname{tg} \lambda(H+s) = K^2 \\ g\sigma \operatorname{Cth} \sigma(H+r) + g\lambda \operatorname{ctg} \lambda(H+s) = K^2. \end{cases}$$

Il sistema (18) è del tipo

$$(18') \quad \begin{cases} ax - by = K^2 \\ \frac{a}{x} + \frac{b}{y} = K^2 \end{cases}$$

con $a = g\sigma$, $b = g\lambda$, $x = \operatorname{Th} \sigma(H+r)$, $y = \operatorname{tg} \lambda(H+s)$. Si ha subito da (18') l'equazione di secondo grado in y

$$(19) \quad bK^2 y^2 + y(K^4 - a^2 - b^2) - bK^2 = 0$$

il cui discriminante

$$\Delta^2 = (K^4 - a^2 - b^2)^2 + 4b^2 K^4$$

è ovviamente positivo; quindi vi sono per y e quindi per x , due radici reali distinte. Ma da (18') possiamo anche ricavare l'equazione di 2° grado in x :

$$(20) \quad aK^2 x - x(b^2 + K^4 - a^2) + aK^2 = 0$$

Il prodotto delle radici x_1, x_2 della (20) è $x_1 x_2 = 1$, quindi sarà $x_1 < 1$, $x_2 > 1$: ma $x = \operatorname{Th} \sigma(H+r) < 1$, quindi la radice $x_2 > 1$ va scartata; il sistema (18) ha pertanto una sola soluzione per $\operatorname{Th} \sigma(H+r)$ e per $\operatorname{tg} \lambda(H+s)$, e quindi per $\operatorname{Th} \sigma r$ e per $\operatorname{tg} \lambda s$ (2). La condizione (3), vista la (16), dà

$$(21) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=0} = e^{-\lambda x} \cos(Kt - \sigma x) [C(\sigma \operatorname{Sh} \sigma r \cos \lambda s - \lambda \operatorname{Ch} \sigma r \sin \lambda s) + \\ + D(\sigma \operatorname{Ch} \sigma r \sin \lambda s + \lambda \operatorname{Sh} \sigma r \cos \lambda s)] + e^{-\lambda x} \sin(Kt - \sigma x) \cdot \\ \cdot [C(\sigma \operatorname{Ch} \sigma r \sin \lambda s + \lambda \operatorname{Sh} \sigma r \cos \lambda s) - D(\sigma \operatorname{Sh} \sigma r \cos \lambda s - \lambda \operatorname{Ch} \sigma r \sin \lambda s)] = \\ = Ae^{-\lambda x} \cos(Kt - \sigma x) + Be^{-\lambda x} \sin(Kt - \sigma x)$$

Ne segue il sistema lineare in C, D :

$$(22) \quad \begin{cases} \alpha C + \beta D = A \\ \beta C - \alpha D = B \end{cases}$$

essendo

$$(23) \quad \alpha = \sigma \operatorname{Sh} \sigma r \cos \lambda s - \lambda \operatorname{Ch} \sigma r \sin \lambda s$$

$$(24) \quad \beta = \sigma \operatorname{Ch} \sigma r \sin \lambda s + \lambda \operatorname{Sh} \sigma r \cos \lambda s$$

da cui si ha

$$(25) \quad \begin{cases} C = \frac{\beta B - \alpha A}{\alpha^2 + \beta^2} \\ D = \frac{\beta A - \alpha B}{\alpha^2 + \beta^2} \end{cases}$$

(2) Per quanto riguarda la determinazione di $\sin \lambda s$ si veda la nota (1) del paragrafo precedente.

Resta ora la condizione (4), che ci permetterà di determinare A_0, A_p, B_0, B_p ; si ha

$$(26) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=0} = A_0 \operatorname{Ch} m_0 y \cos Kt + B_0 \operatorname{Ch} m_0 y \sin Kt + \\ + \sum_{p=1}^{\infty} \cos \lambda_p y [A_p \cos Kt + B_p \sin Kt] - \lambda \cos Kt [C \operatorname{Ch} \sigma(y+r) \cos \lambda(y+s) + \\ + D \operatorname{Sh} \sigma(y+r) \sin \lambda(y+s)] + \sigma \sin Kt [C \operatorname{Ch} \sigma(y+r) \cos \lambda(y+s) + \\ + D \operatorname{Sh} \sigma(y+r) \sin \lambda(y+s)] - \lambda \sin Kt [C \operatorname{Sh} \sigma(y+r) \sin \lambda(y+s) - \\ - D \operatorname{Ch} \sigma(y+r) \cos \lambda(y+s)] - \sigma \cos Kt [C \operatorname{Ch} \sigma(y+r) \sin \lambda(y+s) - \\ - D \operatorname{Ch} \sigma(y+r) \cos \lambda(y+s)] = 0$$

cioè, ancora, le due relazioni, valide per $0 \leq y \leq H$:

$$(27) \quad A_0 \operatorname{Ch} m_0 y + \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cos \lambda_p y = (\lambda C - \sigma D) \operatorname{Ch} \sigma(y+r) \cos \lambda(y+s) + \\ + (\lambda D + \sigma C) \operatorname{Sh} \sigma(y+r) \sin \lambda(y+s)$$

$$(28) \quad B_0 \operatorname{Ch} m_0 y + \sum_{p=1}^{\infty} B_p \cos \lambda_p y = -(\lambda D + \sigma C) \operatorname{Ch} \sigma(y+r) \cos \lambda(y+s) + \\ + (\lambda C - \sigma D) \operatorname{Sh} \sigma(y+r) \sin \lambda(y+s).$$

Ma, per le proprietà delle funzioni $\operatorname{Ch} m_0 y, \cos \lambda_p y$ viste nel paragrafo 2, si ha:

$$(29) \quad A_0 = (\lambda C - \sigma D) \mathfrak{J}_1 + (\lambda D + \sigma C) \mathfrak{J}_2$$

$$(30) \quad A_p = (\lambda C - \sigma D) \mathfrak{J}_3 + (\lambda D + \sigma C) \mathfrak{J}_4$$

e

$$(31) \quad B_0 = -(\lambda D + \sigma C) \mathfrak{J}_1 + (\lambda C - \sigma D) \mathfrak{J}_2$$

$$(32) \quad B_p = -(\lambda D + \sigma C) \mathfrak{J}_3 + (\lambda C - \sigma D) \mathfrak{J}_4$$

essendo

$$(33) \quad \mathfrak{J}_1 = \frac{\int_0^H \operatorname{Ch} m_0 y \operatorname{Ch} \sigma(y+r) \cos \lambda(y+s) dy}{\int_0^H \operatorname{Ch}^2 m_0 y dy}$$

$$(34) \quad \mathfrak{J}_2 = \frac{\int_0^H \operatorname{Ch} m_0 y \operatorname{Sh} \sigma(y+r) \sin \lambda(y+s) dy}{\int_0^H \operatorname{Ch}^2 m_0 y dy}$$

$$(35) \quad \mathfrak{J}_3 = \frac{\int_0^H \cos \lambda_p y \operatorname{Ch} \sigma (y+r) \cos \lambda (y+s) dy}{\int_0^H \cos^2 \lambda_p y dy}$$

$$(36) \quad \mathfrak{J}_4 = \frac{\int_0^H \cos \lambda_p y \operatorname{Sh} \sigma (y+r) \sin \lambda (y+s) dy}{\int_0^H \cos^2 \lambda_p y dy}.$$

Si ottiene dopo semplici calcoli

$$(37) \quad \mathfrak{J}_1 = \frac{1}{[(m_0 + \sigma)^2 + \lambda^2] [\operatorname{Sh} z_0 \operatorname{Ch} z_0 + z_0]} \{ (m_0 + \sigma) \operatorname{Sh} (z_0 + \zeta_0) \cos \vartheta_0 + \\ + \lambda \operatorname{Ch} (z_0 + \zeta_0) \sin \vartheta_0 - (m_0 + \sigma) \operatorname{Sh} \sigma r \cos \lambda s - \lambda \operatorname{Ch} \sigma r \sin \lambda s \} + \\ + \frac{1}{[(m_0 - \sigma)^2 + \lambda^2] [\operatorname{Sh} z_0 \operatorname{Ch} z_0 + z_0]} \{ (m_0 - \sigma) \operatorname{Sh} (z_0 - \zeta_0) \cos \vartheta_0 + \\ + \lambda \operatorname{Ch} (z_0 - \zeta_0) \sin \vartheta_0 + (m_0 - \sigma) \operatorname{Sh} \sigma r \cos \lambda s - \lambda \operatorname{Ch} \sigma r \sin \lambda s \}$$

$$(38) \quad \mathfrak{J}_2 = \frac{1}{[(m_0 + \sigma)^2 + \lambda^2] [\operatorname{Sh} z_0 \operatorname{Ch} z_0 + z_0]} \{ (m_0 + \sigma) \operatorname{Ch} (z_0 + \zeta_0) \sin \vartheta_0 - \\ - \lambda \operatorname{Sh} (z_0 + \zeta_0) \cos \vartheta_0 - (m_0 + \sigma) \operatorname{Ch} \sigma r \sin \lambda s + \lambda \operatorname{Sh} \sigma r \cos \lambda s \} - \\ - \frac{1}{[(m_0 - \sigma)^2 + \lambda^2] [\operatorname{Sh} z_0 \operatorname{Ch} z_0 + z_0]} \{ (m_0 - \sigma) \operatorname{Ch} (z_0 - \zeta_0) \sin \vartheta_0 - \\ - \lambda \operatorname{Sh} (z_0 - \zeta_0) \cos \vartheta_0 - (m_0 - \sigma) \operatorname{Ch} \sigma r \sin \lambda s - \lambda \operatorname{Sh} \sigma r \cos \lambda s \}$$

$$(39) \quad \mathfrak{J}_3 = \frac{1}{[\sigma^2 + (\lambda + \lambda_p)^2] [\cos z_p \sin z_p + z_p]} \{ \sigma \operatorname{Sh} \zeta_0 \cos (z_p + \vartheta_0) + \\ + (\lambda_p + \lambda) \operatorname{Ch} \zeta_0 \sin (z_p + \vartheta_0) - \sigma \operatorname{Sh} \sigma r \cos \lambda s - (\lambda_p + \lambda) \operatorname{Ch} \sigma r \sin \lambda s \} + \\ + \frac{1}{[\sigma^2 + (\lambda_p - \lambda)^2] [\cos z_p \sin z_p + z_p]} \{ \sigma \operatorname{Sh} \zeta_0 \cos (z_p - \vartheta_0) + \\ + (\lambda_p - \lambda) \operatorname{Ch} \zeta_0 \sin (z_p - \vartheta_0) - \sigma \operatorname{Sh} \sigma r \cos \lambda s + (\lambda_p - \lambda) \operatorname{Ch} \sigma r \sin \lambda s \}$$

$$(40) \quad \mathfrak{J}_4 = \frac{1}{[\sigma^2 + (\lambda_p + \lambda)^2] [\cos z_p \sin z_p + z_p]} \{ \sigma \operatorname{Sh} \zeta_0 \sin (z_p + \vartheta_0) - \\ - (\lambda_p - \lambda) \operatorname{Ch} \zeta_0 \cos (z_p + \vartheta_0) - \sigma \operatorname{Sh} \sigma r \sin \lambda s + (\lambda_p + \lambda) \operatorname{Ch} \sigma r \cos \lambda s \} + \\ + \frac{1}{[\sigma^2 + (\lambda_p - \lambda)^2] [\cos z_p \sin z_p + z_p]} \{ \sigma \operatorname{Sh} \zeta_0 \sin (z_p - \vartheta_0) - \\ - (\lambda_p - \lambda) \operatorname{Ch} \zeta_0 \cos (z_p - \vartheta_0) + \sigma \operatorname{Sh} \sigma r \sin \lambda s + (\lambda_p - \lambda) \operatorname{Ch} \sigma r \cos \lambda s \}$$

dove si è posto $z_0 = m_0 H$, $\vartheta_0 = \lambda (H + s)$, $\zeta_0 = \sigma (H + r)$, $z_p = \lambda_p H$.

La forma del pelo libero è data da

$$\begin{aligned}
 (41) \quad \eta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{y=H} = & - \text{Ch } m_0 \text{H} \left[\frac{A_0 K}{g m_0} \cos(Kt - m_0 x) + \frac{B_0 K}{g m_0} \sin(Kt - m_0 x) \right] - \\
 & - \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\lambda_p x} \cos \lambda_p \text{H} \left[- \frac{A_p K}{g \lambda_p} \sin Kt + \frac{B_p K}{g \lambda_p} \cos Kt \right] - \\
 & - \frac{K}{g} e^{-\lambda x} \{ \sin(Kt - \sigma x) [C \text{Ch } \sigma(H+r) \cos \lambda(H+s) + \\
 & + D \text{Sh } \sigma(H+r) \sin \lambda(H+s)] - \cos(Kt - \sigma x) [C \text{Sh } \sigma(H+r) \sin \lambda(H+s) - \\
 & - D \text{Ch } \sigma(H+r) \cos \lambda(H+s)] \}.
 \end{aligned}$$

Il pelo libero è dunque costituito da un'onda progressiva di ampiezza costante, che avanza con velocità K/m_0 , cui si sovrappone un'onda con velocità di propagazione uguale a quella del moto del fondo che si era imposto (K/σ), che però decresce di ampiezza con legge esponenziale; inoltre sono presenti oscillazioni stazionarie la cui ampiezza decresce pure con legge esponenziale, che costituiscono i vari termini della serie che compare in (41).

È immediata l'estensione al caso in cui la perturbazione del fondo sia una qualsiasi funzione periodica rispetto ad x , di periodo $T = 2\pi/\sigma$ che si smorzi con legge esponenziale, e che si propaghi con velocità k/σ , cioè quando la $f(x, t)$ sia del tipo

$$(42) \quad f(x, t) = e^{-\lambda x} F(kt - \sigma x);$$

sarà infatti sufficiente eseguire uno sviluppo in serie di Fourier della F , che risulterà del tipo

$$(43) \quad F(kt - \sigma x) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n(kt - \sigma x) + b_n \sin n(kt - \sigma x)].$$

Data la linearità del problema, la soluzione si otterrà sommando le funzioni potenziali relative ad ogni termine della serie; esse saranno date ancora dalla (17), ove si sostituisca nK a K , $n\sigma$ a σ ; le condizioni (7'), (8'), (18'), determineranno, per ogni n , i valori $m_{0,n}$, $\lambda_{p,n}$, r_n , s_n da sostituirsi a m_0 , λ_p , r , s nella (17). Le medesime sostituzioni, eseguite nelle (25), (29), (30), (31), (32) forniranno i coefficienti C_n , D_n , $A_{0,n}$, $A_{p,n}$, $B_{0,n}$, $B_{p,n}$ analoghi ai C , D , ecc. che compaiono in (17). Quindi la forma del pelo libero è espressa dalla relazione seguente:

$$\begin{aligned}
 (44) \quad \eta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial t} \right)_{y=H} = \\
 = - \sum_{n=1}^{\infty} \text{Ch } m_{0,n} \text{H} \left[\frac{A_{0,n} K n}{g m_{0,n}} \cos(nKt - m_{0,n} x) + \frac{B_{0,n} K n}{g m_{0,n}} \sin(nKt - m_{0,n} x) \right] -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{\infty} e^{-\lambda_{p,n} x} \cos \lambda_{p,n} H \left[- \frac{A_{p,n} K n}{g \lambda_{p,n}} \sin K n t + \frac{B_{p,n} K n}{g \lambda_{p,n}} \cos K n t \right] + \\
& + \frac{1}{g} e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \{ - n \sin n (K t - \sigma x) [C_n \operatorname{Ch} n \sigma (H + r_n) \cos \lambda (H + s_n) + \\
& \quad + D_n \operatorname{Sh} n \sigma (H + r_n) \sin \lambda (H + s_n)] + n K \cos n (K t - \sigma x) \cdot \\
& \cdot [C_n \operatorname{Sh} n \sigma (H + r_n) \sin \lambda (H + s_n) - D_n \operatorname{Ch} n \sigma (H + r_n) \cos \lambda (H + s_n)] \}.
\end{aligned}$$

4. - CONCLUSIONI.

Si vede, nei tre casi studiati, che il fenomeno ondoso indotto dal moto del fondo presenta, oltre all'insorgere di onde che - più o meno fedelmente - ripetono gli spostamenti del fondo, anche un'onda (o una serie di onde nell'ultimo caso) progressive, d'ampiezza costante, e la cui velocità di propagazione non è imposta da quella che eventualmente ha il moto del fondo (come nel secondo dei casi esaminati), ma dipende in modo essenziale dalla profondità dell'acqua nel canale in quiete, in modo simile a quanto avviene nel caso di onde provocate da una ventola.

BIBLIOGRAFIA.

- [1] A. RUBATTA, *Sur la théorie de la génération de la houle par un batteur plan*. C.R.A. Sc. Paris Tome 262, maggio 1966.
- [2] G. SCARPI, *Onde provocate da uno spostamento istantaneo di una parete verticale*. XI Congresso di Idraulica e Costruzioni Idrauliche - Genova 1968.
- [3] J. V. WEHAUSEN e E.V. LAITONE, *Surface waves*; Su *Handbuch der Physik, herausgegeben von S. Flügge*. Vol. IX - Springer Berlino.
- [4] H. LAMB, *Hydrodynamics*, VI^a edizione, Cambridge 1932.
- [5] G. PEZZOLI, *Sulla teoria delle onde di emersione e di impulso. Una soluzione rigorosa del problema di Cauchy e Poisson per moto piano*. « Rend. Acc. Naz. Lincei », Serie VIII, Vol. 38, 1965.