Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Iulius Gy. Maurer, Miklós Szilágyi

L'étude de certaines applications des groupes munis d'une topologie filtrante

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **46** (1969), n.5, p. 515–522.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_5_515_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

Algebra. — *L'étude de certaines applications des groupes munis d'une topologie filtrante.* Nota di IULIUS GY. MAURER e MIKLÓS SZILÁGYI, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si studiano i prodotti infiniti, definiti nell'insieme di tutte le applicazioni univoche d'un gruppo ad operatori munito di una topologia filtrante.

Dans cette Note nous développons une ideé formuleé dans [6], pour déduire des théoremes qui généralisent quelques résultats obtenus dans [1], [2] et [3], concernant les produits infinis définis dans certaines structures algébriques topologisées.

Soient G un groupe et O un ensemble d'endomorphismes de G. On considère l'ensemble O comme un domaine d'opérateurs à droite de G et comme une base du système des voisinages de l'élément unité e du groupe d'opérateurs G, un ensemble non vide $\{G_\xi\}_{\xi \in I}$ de sous-groupes normaux G_ξ $(\xi \in I)$ permis par O, tel que:

1*. I est un ensemble dirigé [par rapport à une relation $\leq$];

2*. si $\xi_1 \geq \xi_2$ $(\xi_1, \xi_2 \in I)$, alors $G_{\xi_1} \subseteq G_{\xi_2}$;

3*. $\bigcap_{\xi \in I} G_\xi = \{e\}$.

Alors G est un groupe topologique Hausdorff [4].

Soient $\mathfrak{F}$ l'ensemble de toutes les applications univoques $f: G \to G$ et $\{f_\nu\}_{\nu \in \Phi}$ une suite Moore-Smith quelconque, où $(\Phi, \leq)$ est un ensemble dirigé et $f_\nu \in \mathfrak{F}$ $(\nu \in \Phi)$. À partir de la topologie donnée dans G, on peut introduire sur $\mathfrak{F}$ la topologie produit [5], dans laquelle la convergence d'une suite $\{f_\nu\}_{\nu \in \Phi}$ signifie une convergence ponctuelle. Il s'ensuit que les notions concernant la convergence d'un système $\{f_\nu\}_{\nu \in \Phi}$ – notions qui seront relativisées par rapport à un sous-ensemble non vide quelconque $H \subseteq G$ – peuvent être formulées de la manière suivante:

A) La suite $\{f_\nu\}_{\nu \in \Phi}$ est fondamentale sur $H \subseteq G$ si et seulement si, pour tout $x \in H$ et pour tout $\xi \in I$, il existe un $\nu_0 = \nu_0(x, \xi) \in \Phi$ tel que $(xf_{\nu_1})^{-1}(xf_{\nu_2}) \in G_\xi$, pour tout $\nu_1, \nu_2 \geq \nu_0$.

B) La suite $\{f_\nu\}_{\nu \in \Phi}$ converge sur $H \subseteq G$ vers l'élément $f \in \mathfrak{F}$ $(f_\nu \xrightarrow{H} f)$ si et seulement si, pour tout $x \in H$ et pour tout $\xi \in I$, il existe un $\nu_0 = \nu_0(x, \xi) \in \Phi$ tel que $(xf_\nu)^{-1}(xf) \in G$, pour tout $\nu \geq \nu_0$.

O b s e r v a t i o n 1. – Puisque la notion de convergence est relativisée par rapport à un sous-ensemble H, il s'ensuit que $f \in \mathfrak{F}_n$ n'est uniquement déterminé que sur H (et non pas sur G).

(*) Nella seduta del 10 maggio 1969.

Observation 2. – Si H et K sont deux sous-ensembles de G, alors on en déduit facilement – en utilisant les définitions A) et B) – les propriétés suivantes: *a*) Si $\{f_\nu\}_{\nu\in\Phi}$ est fondamental sur H et K, alors $\{f_\nu\}_{\nu\in\Phi}$ est fondamental sur $H\cap K$; *b*) si $f_\nu \xrightarrow{H} f_H$ et $f_\nu \xrightarrow{K} f_K$, alors $f_\nu \xrightarrow{H\cap K} f_{H\cap K}$, où $xf_{H\cap K} = xf_H = xf_K$ $(x\in H\cap K)$.

THÉORÈME 1. – *Si la suite* $\{f_\nu\}_{\nu\in\Phi}$ *est convergente sur* H, *alors elle est aussi fondamentale sur* H.

Démonstration. – Supposons que $f_\nu \xrightarrow{H} f$, donc que la propriété B) est vraie. Alors nous obtenons $(xf_{\nu_1})^{-1}(xf)\in G_\xi$, $(xf_{\nu_2})^{-1}(xf)\in G_\xi$ pour tout $\nu_1,\nu_2\geq\nu_0$. Il s'ensuit que $(xf_{\nu_1})^{-1}(xf_{\nu_2})\in G_\xi$, pour tout $\nu_1,\nu_2\geq\nu_0$, donc la propriété A).

THÉORÈME 2. – *Soient* $G_\xi \lhd G$ $(\xi\in I)$ *et* $H \subseteq\!| G$ (1). *Si les applications* f_ν $(\nu\in\Phi)$ *sont des homomorphismes de* H, *permis par* O, *et* $f_\nu \xrightarrow{H} f$, *alors* f *est un homomorphisme de* H, *permis par* O.

Démonstration. – Soient x et y deux éléments arbitraires de H et α un élément arbitraire de O. Puisque $H \subseteq G$, il s'ensuit que $x, y, xy, x\alpha\in H$. À partir de $f_\nu \xrightarrow{H} f$, il en résulte que, pour tout $\xi\in I$ et pour les éléments $x, y, xy, x\alpha\in H$, il existe des éléments $\nu_0(x,\xi)$, $\nu_0(y,\xi)$, $\nu_0(xy,\xi)$, $\nu_0(\alpha x,\xi)\in\Phi$ tels que les relations suivantes sont vérifiées:

$$(1)\qquad (xf_\nu)^{-1}(xf)\in G_\xi,\quad \text{pour tout}\quad \nu\geq\nu_0(x,\xi);$$

$$(2)\qquad (yf_\nu)^{-1}(yf)\in G_\xi,\quad \text{pour tout}\quad \nu\geq\nu_0(y,\xi);$$

$$(3)\qquad (xyf_\nu)^{-1}(xyf)\in G_\xi,\quad \text{pour tout}\quad \nu\geq\nu_0(xy,\xi);$$

$$(4)\qquad [(x\alpha)f_\nu]^{-1}[(x\alpha)f]\in G_\xi,\quad \text{pour tout}\quad \nu\geq\nu_0(\alpha x,\xi).$$

En tenant compte du fait que Φ est un ensemble dirigé, il en résulte l'existence d'un élément $\bar\nu_0\in\Phi$ tel que $\nu_0(x,\xi)$, $\nu_0(y,\xi)$, $\nu_0(xy,\xi)$, $\nu_0(\alpha x,\xi)\leq\bar\nu_0$. Donc les relations (1)–(4) sont valables simultanément pour tout $\nu\geq\bar\nu_0$.

À partir de la formule (3), il s'ensuit que:

$$(5)\qquad xyf\in(xyf_\nu)\,G_\xi = (xf_\nu\cdot yf_\nu)\,G_\xi \text{ (2)}.$$

Les formules (1) et (2) signifient que $(xf_\nu)^{-1}(xf) = g'_\xi\in G_\xi$, $(yf_\nu)^{-1}(yf) = g''_\xi\in G_\xi$. En tenant compte de la relation (5) et du fait que $G_\xi\lhd G$, nous avons

$$(yf)^{-1}(xf)^{-1}(xyf)\in[(yf)^{-1}(xf)^{-1}(xf_\nu\cdot yf_\nu)]\,G_\xi =$$
$$= [(yf)^{-1}(g'_\xi)^{-1}\cdot yf_\nu]\,G_\xi = [(yf)^{-1}yf_\nu]\,G_\xi = (g''_\xi)^{-1}G_\xi = G_\xi.$$

(1) Les notations $G_\xi\lhd G$ et $H\subseteq\!|G$ signifient que G_ξ respectivement H sont des sous-groupes normaux de G permis par O et des sous-groupes de G permis par O.

(2) Si $a\in G$, alors $aG_\xi = \{ag_\xi\,;\,g_\xi\in G_\xi\}$.

Puisque cette relation est vraie pour tout $\xi \in \mathrm{I}$, il s'ensuit, conformément à la formule 3*, que $(yf)^{-1}(xf)^{-1}(xyf) = e$, donc que

$$xyf = xf \cdot yf. \tag{6}$$

La formule (4) implique la relation

$$(x\alpha)f \in [(xa)f_\nu]\,\mathrm{G}_\xi = [(xf_\nu)\,\alpha]\,\mathrm{G}_\xi\,. \tag{7}$$

En tenant compte du fait que α est un endomorphisme de G, que $\mathrm{G}_\xi\alpha \subseteq \mathrm{G}_\xi$ parce que G_ξ est permis par O et que – conformément à la formule (1) – on a l'égalité $(xf_\nu)^{-1}(xf) = g'_\xi \in \mathrm{G}_\xi$, on en déduit que

$$[(xf_\nu)\,\alpha]^{-1}\,[(x\alpha)f] \in [\{(xf)\,\alpha\}^{-1}\,\{(xf_\nu)\,\alpha\}]\,\mathrm{G}_\xi = \{(xf)^{-1}\,\alpha\}\cdot\{(xf_\nu)\,\alpha\}\,\mathrm{G}_\xi =$$

$$= [\{(xf)^{-1}\cdot xf_\nu\}\,\alpha]\,\mathrm{G}_\xi = (g'_\xi\,\alpha)\,\mathrm{G}_\xi = \mathrm{G}_\xi\,.$$

Puisque cette relation est vraie pour tout $\xi \in \mathrm{I}$, il s'ensuit, conformément à la condition 3*, que $[(xf)\,\alpha]^{-1}[(x\alpha)f] = e$, donc que

$$(xf)\,\alpha = (x\alpha)f. \tag{8}$$

Les relations (6) et (8) impliquent la validité du théoreme.

Faisons correspondre la suite $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in\mathrm{N}}$, où $\varphi_\nu = f_1 f_2 \cdots f_\nu \in \mathfrak{F}\,(\nu \in \mathrm{N})$ (3), à la suite $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathrm{N}}\,(f_\nu \in \mathfrak{F}\,;\,\nu \in \mathrm{N})$. Le système $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in\mathrm{N}}$ est dénommé *produit* du système $\{f_\nu\}_{\nu\in\mathrm{N}}$ et sera désigné par Πf_ν. Les applications f_ν sont les *facteurs* du produit et les applications φ_ν sont les *produits partiels d'ordre* ν de Πf_ν. Le produit Πf_ν est dénommé *fondamental*, respectivement *convergent*, sur le sous-ensemble $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$ si et seulement si $\{\varphi_\nu\}_{\nu\in\mathrm{N}}$ est une suite fondamentale, respectivement convergente, sur H. Si $\varphi_\nu \xrightarrow{\mathrm{H}} f$, alors f est dénommé *valeur relative* à H du produit Πf_ν et il sera noté $\Pi f_\nu = f(\mathrm{H})$. Nous disons que Πf_ν *converge inconditionnellement sur* H si et seulement si Πf_ν converge sur H et sa valeur est indépendante de l'ordre des facteurs du produit.

THÉORÈME 3. – *Soient les facteurs* $f_\nu\,(\nu \in \mathrm{N})$ *du produit* Πf_ν *des endomorphismes de* G, *tels que* $\mathrm{G}_\xi f_\nu \subseteq \mathrm{G}_\xi\,(\xi \in \mathrm{I})$. Πf_ν *est un produit fondamental sur* $\mathrm{H} \subseteq \mathrm{G}$ *si et seulement si, pour tout* $x \in \mathrm{H}$ *et pour tout* $\xi \in \mathrm{I}$, *il existe un* $\nu_0 = \nu_0(x, \xi) \in \mathrm{N}$ *tel que*

$$[(x\varphi_{\nu_0})f_\nu]^{-1}\,[x\varphi_{\nu_0}] \in \mathrm{G}_\xi, \quad \textit{pour tout} \quad \nu > \nu_0\,. \tag{9}$$

Démonstration. – Soit Πf_ν un produit fondamental sur H. Alors il existe pour tout $x \in \mathrm{H}$ et pour tout $\xi \in \mathrm{I}$ un $\nu_0 = \nu_0(x, \xi) \in \mathrm{N}$ tel que $(x\varphi_{\nu_1})^{-1}\,(x\varphi_{\nu_2}) \in \mathrm{G}_\xi$, pour tout $\nu_1, \nu_2 \geq \nu_0$. Soit $\nu_2 = \nu_0$ et soit $\nu\,(=\nu_1)$ un nombre quelconque, ayant

(3) N dénote l'ensemble des nombres naturels, ordonné par la relation $\leq$. Si $f, f' \in \mathfrak{F}$, alors le produit ff' est défini par l'égalité $x\,(ff') = (xf)\,f'\,(x \in \mathrm{G})$.

la propriété $\nu \geq \nu_0$. Alors $(x\varphi_\nu)^{-1}(x\varphi_{\nu_0}) \in G_\xi$ pour tout $\nu \geq \nu_0$, donc

$$(10) \qquad (x\varphi_\nu) \in (x\varphi_{\nu_0}) G_\xi\,, \quad \text{pour tout} \quad \nu \geq \nu_0\,.$$

Si donc $\nu > \nu_0$, c'est-à-dire $\nu - 1 \geq \nu_0$, alors

$$(11) \qquad x\varphi_{\nu-1} = (x\varphi_{\nu_0}) g_\xi \qquad (g_\xi \in G_\xi)\,.$$

En tenant compte de la relation (11), du fait que les applications f_ν ($\nu \in N$) sont des endomorphismes de G et de l'égalité $g_\xi f_\nu = g'_\xi \in G_\xi$ ($g_\xi \in G_\xi$), on obtient:

$$(12) \qquad \begin{aligned} x\varphi_\nu &= (x\varphi_{\nu-1}) f_\nu = [(x\varphi_{\nu_0}) g_\xi] f_\nu = \\ &= (x\varphi_{\nu_0}) f_\nu \cdot g_\xi f_\nu = (x\varphi_{\nu_0}) f_\nu \cdot g'_\xi\,. \end{aligned}$$

À partir des relations (10) et (12) il résulte que $(x\varphi_{\nu_0}) f_\nu \cdot g'_\xi \in (x\varphi_{\nu_0}) G_\xi$, donc que $(x\varphi_{\nu_0}) f_\nu \in (x\varphi_{\nu_0}) G_\xi$ pour tout $\nu > \nu_0$. Comme cette relation est équivalente à (9), la condition est nécessaire.

La condition est aussi suffisante. En effet, supposons la validité de la relation (9), donc que $(x\varphi_{\nu_0}) f_\nu \in (x\varphi_{\nu_0}) G_\xi$, pour tout $\nu > \nu_0$. Il en résulte que

$$(13) \qquad (x\varphi_{\nu_0}) f_\nu = (x\varphi_{\nu_0}) g_\xi \quad (g_\xi \in G_\xi)\,, \qquad \text{pour tout} \quad \nu > \nu_0\,.$$

On peut écrire, pour tout $\nu > \nu_0$:

$$(14) \qquad x\varphi_\nu = (x\varphi_{\nu_0}) f_{\nu_0+1} f_{\nu_0+2} \cdots f_\nu\,.$$

Si l'on tient compte du fait que $(x\varphi_{\nu_0}) f_{\nu_0+1} = (x\varphi_{\nu_0}) g_\xi^{(0)}$ ($g_\xi^{(0)} \in G_\xi$), que les applications f_ν ($\nu \in N$) sont des endomorphismes de O et enfin que – selon la condition $G_\xi f_\nu \subseteq G_\xi$ ($\nu \in N$) – on a la relation $g_\xi^{(1)} f_{\nu_0+2} \cdots f_\nu = g_\xi^{(1)} \in G_\xi$, on obtient:

$$(15) \qquad \begin{aligned} (x\varphi_{\nu_0}) f_{\nu_0+1} f_{\nu_0+2} \cdots f_\nu &= [(x\varphi_{\nu_0}) f_{\nu_0+1}] f_{\nu_0+2} \cdots f_\nu = \\ &= [(x\varphi_{\nu_0})\, g_\xi^{(0)}]\, f_{\nu_0+2} \cdots f_\nu = \\ &= [(x\varphi_{\nu_0}) f_{\nu_0+2} \cdots f_\nu] \cdot [g_\xi^{(0)} f_{\nu_0+2} \cdots f_\nu] = \\ &= [(x\varphi_{\nu_0}) f_{\nu_0+2} \cdots f_\nu] \cdot g_\xi^{(1)}\,. \end{aligned}$$

On en déduit également:

$$(16) \qquad \begin{aligned} &(x\varphi_{\nu_0}) f_{\nu_0+2} \cdots f_\nu = [(x\varphi_{\nu_0}) f_{\nu_0+3} \cdots f_\nu]\, g_\xi^{(2)} \\ &- \\ &(x\varphi_{\nu_0}) f_{\nu-1} f_\nu = [(x\varphi_{\nu_0}) f_\nu] \cdot g_\xi^{(\nu-\nu_0-1)}\,, \end{aligned}$$

où $g_\xi^{(2)}, \cdots, g_\xi^{(\nu-\nu_0-1)} \in G_\xi$. Les égalités (14), (15), (16) et (13) impliquent la validité de la relation

$$(17) \qquad x\varphi_{\nu_0} = (x\varphi_{\nu_0}) g'_\xi \quad (g'_\xi \in G_\xi) \qquad \text{pour tout} \quad \nu > \nu_0\,.$$

On désigne ici par g'_ξ l'élément $g_\xi^{(1)} g_\xi^{(2)} \cdots g_\xi^{(\nu-\nu_0-1)} \in G_\xi$.

Si donc $\nu_1 > \nu_0$ et $\nu_2 > \nu_0$, alors nous avons

$$x\varphi_{\nu_1} = (x\varphi_{\nu_0})\bar{g}_\xi \quad (\bar{g}_\xi \in G_\xi) \quad ; \quad x\varphi_{\nu_2} = (x\varphi_{\nu_0})\bar{\bar{g}}_\xi \quad (\bar{\bar{g}}_\xi \in G_\xi).$$

Il s'ensuit que

$$(x\varphi_{\nu_1})^{-1}(x\varphi_{\nu_2}) = (\bar{g}_\xi)^{-1}\bar{\bar{g}}_\xi \in G_\xi \qquad \text{pour tout} \quad \nu_1, \nu_2 > \nu_0.$$

Donc Πf_ν est un produit fondamental sur H.

Observation 3. – De la démonstration du théorème il résulte que *a*) l'affirmation du théorème est vraie au cas où la condition $G_\xi f_\nu \subseteq G_\xi$ n'est pas satisfaite pour un nombre fini des f_ν et *b*) dans la condition (9) l'élément ν_0 peut être remplacé avec un élément quelconque $\nu_0' \geq \nu_0$.

Observation 4. – Si l'espace topologique G est complet, alors la condition du théorème représente une condition nécessaire et suffisante pour la convergence sur H du produit Πf_ν.

THÉORÈME 4. – *Soient les facteurs* f_ν $(\nu \in N)$ *du produit* Πf_ν *des endomorphismes de* G, *tels que* $G_\xi f_\nu \subseteq G_\xi$ $(\xi \in I)$. *Si* Πf_ν *est convergent sur* $H \subseteq G$ *et les facteurs du produit sont commutatifs deux à deux, alors* Πf_ν *est inconditionnellement convergent sur* H.

Démonstration. – Supposons, que $\Pi f_\nu = f(H)$, donc qu'il existe un $\nu_0 = \nu_0(x, \xi) \in N$, pour tout $x \in H$ et pour tout $\xi \in I$, tel que

$$(x\varphi_\nu)^{-1}(xf) \in G_\xi, \qquad \text{pour tout} \quad \nu \geq \nu_0. \tag{18}$$

On désigne par $\Pi f_\nu'$ un quelconque des produits obtenables de Πf_ν par une permutation quelconque des facteurs de ce dernier produit. Soient $\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{\nu_0-1}$ les indices des facteurs $f_1, f_2, \cdots, f_{\nu_0-1}$ dans le produit $\Pi f_\nu'$ et soit $\nu_0' = \max(\nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_{\nu_0-1}) + 1$. Puisque $\nu_0' \geq \nu_0$, il en résulte de (18), au cas où $\nu = \nu_0'$, la relation $(x\varphi_{\nu_0'})^{-1}(xf) \in G_\xi$, donc l'égalité

$$x\varphi_{\nu_0'} = (xf)\cdot g_\xi \qquad (g_\xi \in G_\xi). \tag{19}$$

Nous désignons par φ_ν' le produit partiel d'ordre ν de $\Pi\alpha'$. Puisque les facteurs de Πf_ν sont commutatifs, il s'ensuit que

$$x\varphi_\nu' = (x\varphi_{\nu_0'})f_{\nu_0'+1}\cdots f_\nu, \qquad \text{pour tout} \quad \nu > \nu_0'. \tag{20}$$

Un raisonnement analogue à celui qui a été utilisé pour la démonstration de la suffisance de la condition formulée dans le théorème 3, nous conduit à l'égalité suivante:

$$x\varphi_\nu' = (x\varphi_{\nu_0'})g_\xi', \qquad \text{pour tout} \quad \nu > \nu_0', \tag{21}$$

où $g_\xi' \in G_\xi$. À partir des égalités (19) et (21), nous obtenons: $x\varphi_\nu' = (xf)\bar{g}_\xi$, pour tout $\nu > \nu_0'$, où $\bar{g}_\xi = g_\xi' g_\xi \in G_\xi$. Il s'ensuit que $(x\varphi_\nu')^{-1}(xf) \in G_\xi$, pour tout $\nu > \nu_0'$, donc que $\Pi f_\nu' = f(H)$.

Notre but sera maintenant de trouver des conditions, dans lesquelles la commutativité des facteurs de Πf_ν est aussi nécessaire pour la convergence du produit Πf_ν.

LEMME 1. – *Soient f_1 et f_2 des endomorphismes de* G *permis par* O, *soit* $Gf_1 = Gf_2 = G'$ *et soit f un homomorphisme de* G' *en* G, *permis par* O. *Alors* $x[(f_1 - f_2)f] = x(f_1 f)[x(f_2 f)]^{-1}$, *pour tout* $x \in G$ (4).

Démonstration. – Soient $xf_1 = x_1 \in G'$, $xf_2 = x_2 \in G'$. Alors nous avons les égalités:

$$x[(f_1 - f_2)f] = [x(f_1 - f_2)]f = [(xf_1)(xf_2^{-1})]f =$$
$$= (x_1 \cdot x_2^{-1})f = x_1 f \cdot x_2^{-1} f = x_1 f (x_2 f)^{-1}$$

et

$$x(f_1 f)[x(f_2 f)]^{-1} = [(xf_1)f] \cdot [(xf_2)f]^{-1} = x_1 f \cdot (x_2 f)^{-1}.$$

Nous désignons par Π_{12} le produit obtenu de Πf_ν par la suppression des facteurs f_1 et f_2, c'est-à-dire le produit attaché au système $\{f_\nu\}_{\nu \in N \setminus \{1,2\}}$.

LEMME 2. – *Si* $\Pi_{12} = f'(Gf_1 f_2)$ *et* $\Pi f_\nu = f(G)$, *alors la suivante égalité est valable sur* $G: f_1 f_2 f' = f$.

Démonstration. – Soit x un élément quelconque de G et soient $x' = xf_1 f_2 \in Gf_1 f_2$ et $\varphi'_\nu = f_3 f_4 \cdots f_\nu$ $(\nu \in N \setminus \{1, 2\})$. Alors à partir des égalités $\Pi_{12} = f'(Gf_1 f_2)$ et $\Pi f_\nu = f(G)$, il en résulte qu'il existe un $\nu_0 = \nu_0(x, \xi)$, pour tout $\xi \in I$, tel que

$$(x'\varphi'_\nu)^{-1}(x'f') \in G_\xi \quad \text{et} \quad (x\varphi_\nu)^{-1}(xf) \in G_\xi, \quad \text{pour tout} \quad \nu \geq \nu_0. \tag{22}$$

Mais $x'\varphi'_\nu = (xf_1 f_2)\varphi'_\nu = x(f_1 f_2 \varphi'_\nu) = x\varphi_\nu$ et $x'f' = (xf_1 f_2)f' = x(f_1 f_2 f)$. Il s'ensuit que

$$(x\varphi_\nu)^{-1}(xf_1 f_2 f') = (x'\varphi'_\nu)^{-1}(x'f') \in G_\xi, \quad \text{pour tout} \quad \nu \geq \nu_0. \tag{23}$$

À partir de la seconde relation (22), on déduit que $(xf)^{-1}(x\varphi_\nu) \in G_\xi$, pour tout $\nu \geq \nu_0$. Il résulte de cette relation et de celle de (23) que $(xf)^{-1}(xf_1 f_2 f') \in G_\xi$, pour tout $\nu \geq \nu_0$. Puisque cette relation est vraie pour tout $\xi \in I$, il s'ensuit, conformément à la condition 3^*, que $(xf)^{-1}(xf_1 f_2 f') = e$ $(x \in G)$. Donc l'égalité $f_1 f_2 f' = f$ est vraie sur G.

THÉORÈME 5. – *Soit* G *un groupe commutatif, soit l'espace topologique* G *complet et supposons que les facteurs f_ν du produit Πf_ν sont des endomorphismes de* G. *Si* 1°. $Gf_i f_j = Gf_j f_i$ $(i, j \in N)$, *si* 2°. $[G(f_i f_j - f_j f_i)]f_i f_j \subseteq G(f_i f_j - f_j f_i)$

(4) L'application $f_1 - f_2$ est définie par l'égalité: $x(f_1 - f_2) = (xf_1)(xf_2)^{-1}$, pour tout $x \in G$.

$(i, j \in \mathrm{N})$ et si 3^{o}. *$\Pi f_{\nu} = f(\mathrm{G})$ est un élément régulier à gauche* [5] *de l'anneau complet* $\mathrm{E}(\mathrm{G})$ *des endomorphismes de* G, *alors la convergence inconditonnée de Πf_{ν} implique la commutativité deux à deux des facteurs de Πf_{ν}.*

Démonstration. – Soient f_i et f_j deux facteurs quelconques du produit Πf_{ν}. Puisque Πf_{ν} est inconditionnellement convergent, on peut supposer sans restriction de la généralité, que $f_i = f_1$ et $f_j = f_2$.

Nous démontrons, que Π_{12} est convergent sur $\mathrm{G}f_1 f_2 = \mathrm{G}f_2 f_1$. Supposons que cette propriété n'est pas vraie. En tenant compte du fait que l'espace G est complet, il s'ensuit qu'il existe des éléments $x' \in \mathrm{G}f_1 f_2 = \mathrm{G}f_2 f_1$ et $\xi \in \mathrm{I}$, mais pour lesquels il n'existe aucun $\nu_0' = \nu_0'(x', \xi)$, tel que

$$(x' \varphi_{\nu_1}')^{-1} (x' \varphi_{\nu_2}') \in \mathrm{G}_{\xi}, \qquad \text{si} \quad \nu_1, \nu_2 \geq \nu_0'(x', \xi). \tag{24}$$

Ici φ_{ν_i}' représente le produit $f_3 f_4 \cdots f_{\nu_i}$ $(i = 1, 2)$. Soit x un élément de G pour lequel $x f_1 f_2 = x'$. Puisque $\Pi f_{\nu} = f(\mathrm{G})$, il s'ensuit que Πf_{ν} est un produit fondamental sur G; donc, pour l'élément consideré $x \in \mathrm{G}$ et pour un $\xi \in \mathrm{I}$ quelconque, il existe un $\nu_0 = \nu_0(x, \xi)$ tel que $(x\varphi_{\nu_1})^{-1}(x\varphi_{\nu_2}) \in \mathrm{G}_{\xi}$, pour tout $\nu_1, \nu_2 \geq \nu_0$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} (x'\varphi_{\nu_1}')^{-1}(x'\varphi_{\nu_2}') &= [(xf_1 f_2)\varphi_{\nu_1}']^{-1} [(xf_1 f_2)\varphi_{\nu_2}'] = \\ &= [x(f_1 f_2 \varphi_{\nu_1}')]^{-1} [x(f_1 f_2 \varphi_{\nu_2}')] = (x\varphi_{\nu_1})^{-1}(x\varphi_{\nu_2}) \in \mathrm{G}_{\xi}, \end{aligned} \tag{25}$$

pour tout $\nu_1, \nu_2 \geq \nu_0$. Cette relation contredit l'affirmation relative à la formule (24).

Soit $\Pi_{12} = f'(\mathrm{G}f_1 f_2 = \mathrm{G}f_2 f_1)$. À partir des égalités $f_1 f_2 f' = f$ et $f_2 f_1 f' = f$ – qui sont vraies en vertu du lemme 2 – on obtient les égalités, vraies pour tout $x \in \mathrm{G}$: $[x(f_1 f_2 f')]^{-1}[x(f_2 f_1 f')] = e$ et $[(xf_1 f_2)f']^{-1}[(xf_2 f_1)f') = e$. Puisque, en vertu du théorème 2, f' est un homomorphisme du sous-groupe $\mathrm{G}f_1 f_2 = \mathrm{G}f_2 f_1$ de G et puisque G est commutatif, la dernière égalité peut être écrite sous la forme: $[(xf_2 f_1)(xf_1 f_2)^{-1}]f' = e$. Donc $(x\gamma)f' = e$, où $\gamma = f_2 f_1 - f_1 f_2$ et x est un élément arbitraire de G – c'est-à-dire $(\mathrm{G}\gamma)f' = e$. Conformément à la condition 2^{o}, nous avons $(\mathrm{G}\gamma)f_1 f_2 \subseteq \mathrm{G}\gamma$. Il s'ensuit que $x(\gamma f_1 f_2) = (x\gamma) f_1 f_2 \in \mathrm{G}\gamma$, pour tout $x \in \mathrm{G}$. Puisque $(\mathrm{G}\gamma)f' = e$, il s'ensuit que $x(\gamma f) = x(\gamma f_1 f_2 f') = [x(\gamma f_1 f_2)]f' = [(x\gamma)f_1 f_2]f' = e$, pour tout $x \in \mathrm{G}$. Il en résulte que $\gamma f = \theta$. Puisque f est un élément régulier à gauche de $\mathrm{E}(\mathrm{G})$, il s'ensuit que $\gamma = \theta$, donc que $f_1 f_2 = f_2 f_1$.

(5) Désignons par θ l'endomorphisme de G pour lequel $x\theta = e$ $(x \in \mathrm{G})$. $f \in \mathrm{E}(\mathrm{G})$ est dénommé élément régulier à gauche si $hf \neq \theta$ pour tout $h \in \mathrm{E}(\mathrm{G})$, où $h \neq \theta$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] I. GY. MAURER, *Über im Endomorphismenringe einer abelschen Gruppe definierte unendliche Reihen und Produkte*, « Acta Sci. Math. (Szeged) », XXIII, f. 1–2, 171–175 (1962).

[2] I. GY. MAURER, I. PURDEA et I. VIRÀG, *Une topologie dans l'espace des applications univoques d'un ensemble*, « Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. Phys. de la R.P.R. », *6* (54), nr. 3–4, 195–206 (1962).

[3] I. GY. MAURER et M. SZILÀGYI, *Despre convergenta produselor infinite definite in inelele de endomorfisme ale unui grup abelian* (*Sur la convergence des produits infinis définis dans les anneaux d'endomorphismes d'un groupe abélien*), « Studia Univ. Babes-Bolyai, series math. – phys. », f. 2., 17–23 (1965).

[4] I. GY. MAURER et M. SZILÀGYI, *Über eine Untergruppentopologie der Operatorgruppen*, Miskolci Nehézipari Egyetem Közleményei, 30, 1968 (sous presse).

[5] I. GY. MAURER et M. SZILÀGYI, *Uber gewisse Topologien die in der Menge der eindeutigen Abbildungen einer Menge in eine Operatorgruppe definiert sind*, « Publicationes Math. (Debrecen) », *14*, f. 1–4, 161–167 (1967).

[6] I. GY. MAURER, *Quelques problèmes d'algèbre pure et d'algèbre topologique*, « Rendiconti di Matematica » (sous presse).