Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

# Rendiconti

Enrico Bompiani

## Sulla geometria dell'equazione differenziale: $y''' = G(x, y, y')y'' + H(x, y, y')y''$

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8*, Vol. **46** (1969), n.5, p. 535–540.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_46_5_535_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1969.

**Geometria differenziale.** — *Sulla geometria dell'equazione differenziale*: $y''' = G(x, y, y')y'' + H(x, y, y')y''^2$. Nota (*) del Socio ENRICO BOMPIANI.

SUMMARY. — The integral curves of the above written differential equation were projectively characterized by A. Terracini; further results in the same direction are given here.

## 1. INTRODUZIONE.

Allo studio delle proprietà geometriche delle curve integrali dell'equazione differenziale indicata nel titolo (quando $x, y$ s'interpretino come coordinate cartesiane ortogonali in un piano euclideo) era stato condotto E. Kasner da problemi di dinamica (1).

Il Kasner si era anche accorto che detta equazione si conserva dello stesso tipo per trasformazioni proiettive; però le caratterizzazioni geometriche ch'Egli dà sono tutte di natura metrica.

È merito di A. Terracini di avere dato di quel tipo di equazioni – ch'Egli chiama (G) o di «tipo (G)» – caratterizzazioni proiettive (per le loro curve integrali) (2): queste anzi rendono superflua la dimostrazione analitica del Kasner dell'invarianza del tipo (G) per trasformazioni proiettive.

(*) Presentata nella seduta del 10 maggio 1969.

(1) E. KASNER – A) *The trajectories of dynamics*, «Trans. Am. Math. Soc.», vol. 7, (1906); B) *Dynamical trajectories: the motion of a particle in an arbitrary field of force*, ibid. vol. 8 (1907); *Differential geometric aspects of dynamics*, The Princeton Colloquium 1909, New York 1913, ristampato nel 1934; D) *Dynamical Trajectories and the* $\infty^3$ *sections of a surface*, «Proc. Amer. Acad. of Sciences», vol. 17 (1931); E) *General Theorems on trajectories and lines of force* ibid., vol. 20, 1935; F) *Dynamical Trajectories and curvature trajectories* «Bull. A. M. S.» (1934).

Si veda pure: G. COMENETZ, *Curvature trajectories*, «Amer. Journal of Math». vol. 58 (1936) e L. A. MAC COLL, *General aspects of relativistic Dynamics*, «Trans. A. M. S.», vol. 45–46, 1939, pp. 328–347; A. VASSEL, *Characterization of sectional families*, «Amer. Journal of Math.», vol. 62, 1940, pp. 813–822; E. KASNER–J. DE CICCO, *A generalized theory of dynamical trajectories*, «Trans. A. M. S.», t. 54, 1943, pp. 23–28.

(2) A. TERRACINI, *Sobre la ecuacion diferencial* $y''' = G(x, y, y')y'' + H(x, y, y')y''^2$ «Rev. de Mat. y Fis. teor. Tucumán», vol. 2, 1941, pp. 245–239 (o SELECTA, Edizioni Cremonese, 1968, pp. 432–521).

A questo primo lavoro sull'argomento si collegano i seguenti:

A) – *Aportes al estudio geometrico de la ecuacion diferencial*

$$y''' = F(x, y, y') + G(x, y, y')y'' + H(x, y, y')y''^2$$

Revista de Mat. y Fis. teor., Tucumán, vol. III, 1942, pp. 195–234.

B) *Los* $S_3$ *osculadores a las curvas de una variedad y nueva caracterizacion de una clase de variedades*, ibid. vol. III, 1942 pp. 317–339; C) *Sobre algynos systemas de ecuaciones diferenciales de Tercer orden*, «Anais Acad. Brasil. de Ciencias», t. XVI, 1944, p. 227–244; D) *Sulla geometria delle equazioni differenziali*, «Ann. di Mat.» (VI) t. XXV, 1946, pp. 277–286; E) *Caracterizaciones geométricas de la ecuacion* (G) *subordinada a una ecuacion diferencial de tipo* (F). «Revista de Mat. y Fis. teor., Tucumán», vol. VI 1948, pp. 255–261; F) *Sobra las*

Il Terracini considera le curve integrali aventi in comune un elemento del $1^{\circ}$ ordine $E^1$ (punto, *centro* di $E^1$, e tangente in esso). Le $\infty^2$ coniche contenenti gli $E^3$ delle curve integrali, cioè aventi con queste contatto del $3^{\circ}$ ordine, per l'$E^1$ fissato formano una *rete*: esiste un *punto* (*satellite*) sulla tangente che ha rispetto a *tutte* le coniche della rete la stessa polare (*retta satellite*).

La figura costituita dall'$E^1$ e dal punto e dalla retta satelliti vien detta dal Terracini 3–elemento (individuato da due rette e un punto sopra una sola di esse, o da due punti e da una retta per uno solo di essi).

Se dell'$E^1$ si tiene fisso il centro e si varia la retta (tangente) si ha una *linea satellite*, luogo del punto satellite; se invece si tiene fissa la retta e si varia il centro si ha un *inviluppo satellite*, che ha per tangenti le rette satelliti. Il Terracini chiama ancora *retta associata* ad un $E^1$ la tangente nel punto satellite alla linea satellite e *punto associato* il punto di contatto della retta satellite con l'inviluppo satellite.

Quando, per ogni $E^1$, la retta associata passa per il punto associato l'equazione o il sistema delle sue linee integrali è detto *serrato*.

Prescindendo da altre configurazioni e passando alle $\infty^1$ coniche aventi contatto del $4^{\circ}$ ordine con le curve integrali, cioè alle coniche per gli $E^4$ integrali, contenenti un $E^1$ assegnato, il Terracini dimostra ch'esse sono bitangenti ad una stessa conica.

Scopo di questa Nota è di riprendere le considerazioni del Terracini da un punto di vista locale e di approfondirle determinando per ogni $E^1$ un riferimento proiettivo (e non solo un 3–elemento) e altri elementi geometrici ad esso collegati.

## 2. Trilatero determinato da un $E^1$.

Per non interrompere la trattazione nel seguito calcoliamo subito alcune conseguenze differenziali dell'equazione

$$(G) \qquad y''' = G(x, y, y')\, y'' + H(x, y, y')\, y''.$$

Adoperiamo, col Terracini, la notazione seguente per le derivate di:

$$G_1 = \frac{\partial G}{\partial x}\ ,\quad G_2 = \frac{\partial G}{\partial y}\ ,\quad G_3 = \frac{\partial G}{\partial y'}\ ,\quad G_{11} = \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\ ,\quad G_{12} = \frac{\partial^2 G}{\partial x\, \partial y}\ , \text{ etc.}$$

e così per le derivate di H.

*ecuaciones diferenciales de tipo* (G) *y de tipo* (F), ibid. vol. VI, 1948, pp. 273–287; G) *Su alcuni sistemi triplamente infiniti di curve*, «Rend. Sem. Mat. Univ. e Polig. Torino», vol. VIII, 1949, pp. 227–240 (o SELECTA, Edizioni Cremonese, 1968, vol. II, pp. 522–525); H) *Aspetti proiettivi nella teoria delle equazioni differenziali*, «Ann. Univ. Ferrara», vol. VIII, 1950 (o SELECTA, Edizioni Cremonese, 1968, vol. II, pp. 528–537); L) *Trasformazioni dualistiche di tipo nullo sul piano e sistemi* (G) *proiettivamente deformabili*, «Rend. Acc. Lincei» (VIII), vol. X, 1951, pp. 89–94 (o SELECTA, Edizioni Cremonese 1968, vol. II, pp. 538–544); M) *Sistemi (G) proiettivamente deformabili di tipo speciale*, «Rend. Acc. Lincei» (VIII), vol. X, 1951, pp. 186–189 (o SELECTA, Edizioni Cremonese 1968, vol. II, pp. 545–549); N) *Sui sistemi* F *di linee spaziali*, «Rend. Acc. Lincei», (VIII), vol. XXIV, 1958, pp. 220–226 (o SELECTA, Edizioni Cremonese, 1968, vol. II, 699–708).

Si ha

$$y^{\text{IV}} = (G^2 + G_1 + G_2 y')\, y'' + \\ + (3\,HG + G_3 + H_1 + H_2 y')\, y''^2 + (2\,H + H_2)\, y''^3. \tag{2.1}$$

Fissiamo un $E_0^1(x\,,y\,,y')$ che possiamo sempre scegliere, disponendo del sistema coordinato, come definito da $x = y = y' = 0$; indichiamo con $\mathring{G}\,,\mathring{H}\,,\mathring{G}_1\,,\mathring{H}_1\,,\cdots$ i valori di $G\,,H$ e delle loro derivate per questo $E_0^1$. Un $E_2 \supset E_0^1$ rimane definito assegnando un valore finito per $\mathring{y}''$; la (G) determina allora un $E^3$ *integrale* di (G) per l'$E^2$ e le sue derivate determinano gli $E^s$ per $s > 3$ della curva integrale individuata da $E^2$.

Consideriamo col Terracini le coniche per un $E^3$ integrale; esse formano un fascio che in coordinate omogenee $(x\,,y\,,z)$ si scrive

$$yz = \frac{\mathring{y}''}{2} x^2 + \frac{1}{3}(\mathring{G} + \mathring{H}\mathring{y}'')\, xy + \gamma y^2 \tag{2.2}$$

con $\gamma$ arbitrario; e al variare di $\mathring{y}''$ (cioè di $E^2$) si ha una *rete* dipendente solo da $E_0^1$.

Si vede subito che la polare del punto $(3\,,0\,,\mathring{G})$ rispetto a *qualsiasi* conica della rete (quindi determinata da $E_0^1$) è la retta $3x + \mathring{H}y = 0$: se si prende quel *punto* (*satellite* di $E_0^1$) come punto improprio della tangente $y = 0$ e quella *retta* (*satellite* di $E_0^1$) come $x = 0$ si ha

$$\mathring{G} = \mathring{H} = 0 \tag{2.3}$$

L'$E_0^1$ insieme col punto e con la retta satellite costituiscono il 3-elemento del Terracini.

Per finire di determinare (in relazione ad $E_0^1$) un riferimento intrinseco occorre ancora determinare il lato del trilatero opposto al centro O di $E_0^1$ o *retta impropria*, e il punto unità.

Con le scelte fatte di $E_0^1$ e (2.3) la (2.1) diviene

$$\frac{1}{6}\mathring{G}y^2 + \mathring{y}''\left\{\frac{1}{3}(\mathring{G}_3 + \mathring{H}_1)\, y - z\right\} y + \frac{y_0''}{2}\left(x^2 + \frac{1}{3}\mathring{H}_3 y^2\right) = 0 \tag{2.4}$$

e perciò la conica $\Gamma^2$ contenente l'$E^4$ della curva integrale determinata da un $E^2 \supset E_0^1$ ha l'equazione

$$\mathring{G}_1 y^2 + 2\,\mathring{y}''\{(\mathring{G}_3 + \mathring{H}_1)\, y - 3\,z\}\, y + \mathring{y}''^2 (3\,x^2 + \mathring{H}_3 y^2) = 0. \tag{2.5}$$

Essa mostra che *la retta*

$$(\mathring{G}_3 + \mathring{H}_1)\, y = 3\,z \tag{2.6}$$

*se* $\mathring{G}_1 \neq 0$ *taglia le due coniche relative a valori uguali ed opposti di* $\mathring{y}''$, *cioè a due* $E^2$ *a contatto armonico, nella stessa coppia di punti.*

Se prendiamo questa retta intrinsecamente determinata da $E_0^1$ come retta impropria risulta

$$\mathring{G}_3 + \mathring{H}_1 = 0 \tag{2.7}$$

e la conica (2.5) si scrive

$$\mathring{G}_1 y^2 - 6\,\mathring{y}'' yz + \mathring{y}''^2 (3\,x^2 + \mathring{H}_3 y^2) = 0\,. \tag{2.5'}$$

Tutte queste coniche, al variare di $\mathring{y}''$, sono, come aveva già notato il Terracini, bitangenti alla conica

$$\mu: \qquad \mathring{G}_1 (3\,x^2 + \mathring{H}_3)\, y^2 = gz^2$$

la congiungente i punti di contatto con la conica (2.5′) è la retta

$$\mathring{G}_1 y = 3\,\mathring{y}''\,z.$$

Queste rette formano fascio intorno al punto satellite e sono in corrispondenza biunivoca con gli $E^2 \supset E_0^1$ ad eccezione della retta impropria (che si ha per $y'' = \infty$) che così viene nuovamente caratterizzata.

*Se* $\mathring{G}_1 \neq 0$ *vi sono due parabole* (2.5′) (*tangenti a* $z = 0$ *nel punto* $x = z = 0$) *determinate da*

$$\mathring{G}_1 + \mathring{y}''^2\, H_3 = 0$$

*che individuano due* $E^2$ *a contatto armonico* $\supset E_0^1$.

Se invece $\mathring{G}_1 = 0$ la conica (2.5′) si riscrive

$$2\,yz = \mathring{y}''\left(x^3 + \frac{\mathring{H}_3}{3}\,y^2\right). \tag{2.5''}$$

Al variare di $\mathring{y}''$ questa conica descrive un fascio che ha due punti base in O e due su $z = 0$ che viene così caratterizzata; le polari di $(0\,,1\,,0)$ rispetto ad esse descrivono il fascio $3\,z = \mathring{y}''\,\mathring{H}_3\,y$. Il luogo dei punti di contatto delle tangenti condotte da $(0\,,1\,,0)$ a quelle coniche è la coppia di rette

$$3\,x^2 = \mathring{H}_3\, y^2.$$

Manca naturalmente la conica $\mu$.

## 3. Elementi associati. Individuazione di un elemento intrinseco.

Passiamo a trovare gli elementi *associati* (secondo il Terracini).

Si tenga fisso il centro O $(x = y = 0)$ e si consideri l'$E^1$ che ha per tangente in esso la $y = \lambda x$. Nell'intorno di $\lambda = 0$ si avrà per esempio

$$G(0\,,0\,,\lambda) = \mathring{G}_3\,\lambda + \frac{1}{2}\,\mathring{G}_{33}\,\lambda^2 + \cdots \tag{3.1}$$

e perciò dall'equazione (G) posto $\bar{y} = y - \lambda x$

$$\bar{y}''' = \left(\mathring{G}_3 \lambda + \frac{1}{2} \mathring{G}_{33} \lambda^2 + \cdots\right) y'' + \left(\mathring{H}_3 \lambda + \frac{1}{2} \mathring{H}_{33} \lambda^2 + \cdots\right) y''^2. \tag{3.2}$$

Limitandoci ai termini del 2° ordine in $\lambda$ le coniche contenenti un $\overline{E}^3$ per $\overline{E}^1$ (con $y''$ e $\gamma$ arbitrarii) sono

$$\bar{y}z = \frac{y''}{2} x^2 + \frac{1}{3}\left(\mathring{G}_3 + \frac{1}{2} \mathring{G}_{33} \lambda\right) \lambda x \bar{y} + \frac{y''}{3}\left(\mathring{H}_3 + \frac{1}{2} \mathring{H}_{33} \lambda\right) \lambda x \bar{y} + \gamma \bar{y}^2 \tag{3.3}$$

con $y''$ e $\gamma$ arbitrarii. Risulta (con lo stesso procedimento tenuto per $\lambda = 0$) che la polare del punto

$$x_0 = 1 \quad , \quad y_0 = \lambda \quad , \quad z_0 = \frac{1}{3}\left(\mathring{G}_3 \lambda + \frac{1}{2} \mathring{G}_{33} \lambda^2 + \cdots\right) \tag{3.4}$$

*non* dipende da $y''$ e $\gamma$; cioè detto punto descrive la curva satellite (al variare di $\lambda$), e se ci si limita ai termini fino al 2° ordine in $\lambda$ si ha un $E^2$ della curva satellite (con centro nel punto $y_0 = z_0 = 0$).

La conica per questo $E^2$ (che può dirsi *associato* all'$E_0^1$) e tangente in O ad $x = 0$ (retta satellite) ha per equazione:

$$6\, xz - 2\, \mathring{G}_3\, yz = \mathring{G}_{33}\, y^2 \tag{3.5}$$

la retta $3\, z = \mathring{G}_3\, y$ è *associata* all'$E_0^1$ dato.

Se $\mathring{G}_3 = 0$ la retta associata coincide con la retta impropria già geometricamente definita.

Analogamente si trova che il *punto associato* (punto di contatto con $x = 0$ dell'inviluppo satellite) ha le coordinate

$$x = 0 \quad , \quad y = 3 \quad , \quad z = \mathring{H}_1 = -\mathring{G}_3 \tag{3.6}$$

(l'ultima uguaglianza è conseguenza della (2.7)).

Ciò pone in evidenza che: *sulla retta satellite $x = 0$ il centro di $E_0^1$, il suo punto improprio, il punto associato e la traccia della retta associata formano gruppo armonico* (*se gli ultimi tre punti non coincidono*); e questa proprietà dà un'ulteriore caratterizzazione della retta impropria.

Se la conica (3.5) non è tangente alla retta impropria (cioè $\mathring{G}_3 \neq 0$) né la contiene ($\mathring{G}_{33} \neq 0$) ce ne possiamo servire per determinare un punto unità. Possiamo prendere come tale il punto d'intersezione della tangente in $(1, 0, 0)$ alla conica e della polare rispetto ad essa di $(0, 1, 0)$. Con ciò si ha

$$\mathring{G}_3 = -\mathring{G}_{33} = 3.$$

Determinato così un riferimento intrinseco ogni altro termine negli sviluppi di G ed H è un invariante.

La condizione affinché il sistema di curve integrali relativo ad $E_0^1$ sia *serrato* è che la retta associata $3\, z = \mathring{G}_3\, y$ passi per il punto associato $(0, 3, \mathring{H}_1)$: ciò porta $\mathring{G}_3 = \mathring{H}_1$; ma poiché, per la scelta della retta impropria, è già (2.7) $\mathring{G}_3 + \mathring{H}_1 = 0$ risulta $\mathring{G}_3 = \mathring{H}_1 = 0$ quale espressione della condizione posta.

## 4. Elementi integrali sestattici.

Cerchiamo se esistano $E^2$ tali che gli $E^5$ integrali per essi siano sestattici cioè che appartengano alla conica (2.5′) (contenente l'$E^4$ integrale per $E^2$). Poiché questa conica è rappresentata da un'equazione in cui $x$ entra solo al quadrato se si sviluppa $y$ in funzione di $x$ (nell'intorno di O) mancano tutte le potenze di $x$ di grado dispari quindi $\mathring{y}''' = \mathring{y}^{\mathrm{V}} = \cdots = 0$.

Bisogna quindi e basta che $\mathring{y}^{\mathrm{V}}$ sulla curva integrale per $E^2$ sia nulla. Derivando la espressione (2.1) di $y^{\mathrm{IV}}$ e ponendo poi nella derivata $x = y = y' = 0$, $\mathring{G} = \mathring{H} = 0$, si trova un'espressione di 4° grado in $y''$ che è divisibile per $y''$. I tre $E^2$ per cui è nulla quest'espressione (ma con $y'' \neq 0$ altrimenti risulterebbe $y^{\mathrm{IV}} = 0$ il che non è se $\mathring{G}_1 \neq 0$) sono tali che gli $E^5$ integrali per essi sono sestattici.

*Esistono per ogni* $E_0^1$ *tre elementi* $E^5$ *integrali sestattici.*