
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIUSEPPE BIARDI, GUIDO ANTOLINI, FABIO LOSCO,
MARIO DENTE

**Applicazione numerica di un metodo variazionale
alla risoluzione di problemi di moto puramente
viscoso per fluidi Non-Newtoniani**

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 47 (1969), n.3-4, p.
193-209.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1969_8_47_3-4_193_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

SEZIONE II

(Fisica, chimica, geologia, paleontologia e mineralogia)

Fisica. — *Applicazione numerica di un metodo variazionale alla risoluzione di problemi di moto puramente viscoso per fluidi Non-Newtoniani.* Nota (*) di GIUSEPPE BIARDI (**), GUIDO ANTOLINI (***), FABIO LOSCO (****) e MARIO DENTE (**), presentata dal Socio G. NATTA.

SUMMARY. — This paper deals with the application of a well known variational principle to the numerical description of velocity profiles around submerged objects and the evaluation of drag coefficients under circumstances of creeping flow and power-law fluids.

The cases investigated cover both spheres and circular indefinite cylinders; the obtained results, for the former situation, are in fairly close agreement with experiments and previous theories, for the latter show how Stokes's paradox can be eliminated for a non-Newtonian fluid.

INTRODUZIONE.

L'utilizzazione di metodi variazionali per la risoluzione di problemi complessi da un punto di vista analitico è da lungo tempo nota; tuttavia le sue possibilità di affermarsi come tecnica estremamente versatile e di applicazione relativamente facile si sono accresciute con l'avvento di calcolatori veloci e con la disponibilità di programmi adeguati di ricerca di massimo e minimo.

Riteniamo di qualche interesse richiamare alcuni concetti.

In generale, la descrizione « variazionale » di un sistema fisico consiste nell'affermare che la variazione di un funzionale rispetto a delle funzioni ben specificate, quando siano rispettati certi vincoli e condizioni di contorno, è uguale ad un valore assegnato, che solitamente è lo zero.

In quest'ultimo caso, dalla condizione di variazione nulla imposta al funzionale, utilizzando i metodi classici del calcolo delle variazioni si possono ricavare un certo numero di equazioni differenziali colle relative condizioni iniziali e al contorno.

Queste debbono corrispondere alle equazioni costitutive di moto, di trasporto o di bilancio che descrivono il comportamento fisico del fenomeno in istudio, di cui la versione variazionale rappresenta una formulazione alternativa a quella differenziale, spesso anche di immediato significato fisico.

Spesso il funzionale non è semplicemente « stazionario » ma presenta un « punto » di minimo o di massimo: in questo caso si può dire che una

(*) Pervenuta all'Accademia il 6 settembre 1969.

(**) Istituto di Chimica Industriale del Politecnico - Milano.

(***) SNAM Progetti L.R.S.R. San Donato Milanese.

(****) A.R.S. Applicazioni e Ricerche Scientifiche - Milano, Via Saldini, 18.

certa proprietà globale del comportamento del sistema, rappresentata dal funzionale stesso, è minima o massima, e si parla di un « principio di minimo » o « di massimo ».

La « formulazione » variazionale si presenta così piuttosto suggestiva e molto sintetica da un punto di vista concettuale e d'altra parte si presta molto bene a suggerire un « metodo » variazionale per la ricerca di soluzioni approssimate del problema quando i mezzi analitici siano impotenti.

Questo metodo si basa sull'introduzione nel funzionale di una soluzione di tentativo contenente alcuni parametri liberi rispetto ai quali il funzionale stesso viene variato in modo da soddisfare la condizione di variazione nulla. I vantaggi connessi con tale procedura sono molteplici:

1) Nella scelta della soluzione di tentativo possono entrare tutte le informazioni qualitative o semiquantitative possedute sulla fisica del fenomeno sulla base di considerazioni intuitive o per mezzo di analogie con problemi simili.

2) Gli errori connessi col calcolo numerico tendono ad essere smorzati a causa della presenza di una integrazione, in confronto ai metodi numerici applicati ad equazioni differenziali, per cui la proprietà fisica che corrisponde al funzionale può essere stimata con buona accuratezza.

3) Quando il « principio variazionale » è di « massimo » o di « minimo », il metodo fornisce rispettivamente un limite inferiore o superiore del funzionale. Ciò è particolarmente rilevante quando sia possibile formulare due principi variazionali reciproci (di massimo e di minimo) per lo stesso problema (vedi ad esempio il rif. [1]).

4) Poiché, dal punto di vista numerico, il calcolo del funzionale stazionario viene trasformato nel problema della ricerca di un massimo o di un minimo, il metodo è strutturalmente stabile.

Contro questi vantaggi sta un'unica limitazione seria costituita dalla necessità che il problema sia variazionale non solo formalmente ma anche nella sostanza, nel senso, cioè, che deve corrispondere effettivamente al principio di massimo o di minimo di una funzione a significato fisico.

Un'analisi piuttosto accurata di queste questioni è stata fatta da Finlayson e Scriven [2].

Nel campo della fluidodinamica i principi variazionali non sono molti, e in questo lavoro verrà preso in esame il solo caso del moto di fluidi viscosi attorno a corpi immersi nella corrente, in un campo di condizioni per cui il numero di Reynolds risulta molto piccolo ($Re < 1$).

È questo il regime fluidodinamico detto di « moto puramente viscoso » (creeping flow) [3], il quale è particolarmente importante per i fluidi pseudo-plastici che hanno solitamente una « viscosità media » piuttosto elevata.

Per tali fluidi non si hanno soluzioni analitiche per il campo di moto e per il fattore di attrito neanche per il caso geometricamente più semplice del moto attorno a una sfera rigida (problema di Stokes), e d'altra parte la soluzione numerica delle equazioni di Navier Stokes semplificate si presenta estremamente difficile e incerta.

Approcci differenti, basati anche su metodi variazionali, sono stati proposti in lavori precedenti [1], [4], [5], [10], fra i quali si possono citare gli studi di Slattery, di Wasserman e Slattery, che pongono in luce il « principio variazionale » valido per il problema in esame e che sviluppano un « metodo variazionale » ricercando il minimo con l'ausilio delle derivate vuoi per via analitica vuoi per via numerica.

Nel presente lavoro viene presentato un metodo variazionale il quale, accoppiato ad un programma di ricerca diretta di minimo per funzioni di più variabili, è in grado di utilizzare il « principio variazionale » con un numero a priori non vincolato di parametri adattivi.

Il metodo è stato applicato, per fluidi pseudoplastici, al caso del moto attorno ad una sfera a scopo di confronto con i risultati di Slattery, e quindi al caso del moto attorno ad un cilindro indefinito.

Questo secondo caso presenta un interesse concettuale anche più rilevante in quanto è noto che per fluidi Newtoniani l'ipotesi di moto bidimensionale puramente viscoso porta ad un risultato incongruente, noto come « paradosso di Stokes » [6].

È noto altresì, comunque, che il paradosso, inerente allo schema matematico fatto dal problema, è rimovibile pur di tener conto anche in modo semplificato o degli effetti della tridimensionalità del moto, o della presenza dei termini inerziali per quanto piccoli; in tal modo sia il campo di moto che il fattore di attrito diventano determinati.

L'applicazione del metodo variazionale ha mostrato che il paradosso di Stokes può essere rimosso anche se si considera il fluido di tipo pseudoplastico; non solo, approfittando dell'approssimazione strutturalmente connessa col metodo e insita nelle forme funzionali di tentativo che si utilizzano, è possibile rendere determinato il problema anche per il fluido Newtoniano, con risultati in buon accordo con i dati sperimentali e con la teoria di Oseen [3], [7].

ANALISI DEL PROBLEMA E IMPOSTAZIONE DELLA RISOLUZIONE COL METODO VARIAZIONALE.

L'integrazione del sistema di equazioni differenziali necessarie a caratterizzare il campo di moto (equazioni di Navier Stokes e equazione di continuità) non è in genere effettuabile se non in qualche caso particolare o quando si introducano drastiche ipotesi semplificative.

Nel caso della sfera, per esempio, e per fluido Newtoniano, è nota una soluzione asintotica ($Re \ll 1$) che conduce alla ben nota legge di Stokes:

$$(1) \quad f = 24/Re.$$

Alla base di questa trattazione è l'ipotesi che i termini inerziali siano sempre trascurabili rispetto a quelli viscosi. Un raffinamento è stato poi portato da Oseen [7] il quale, per quanto in forma semplificata, è riuscito a tener conto della presenza dei termini inerziali, linearizzandoli opportunamente.

Coi fluidi non Newtoniani la trattazione si presenta più complessa e analiticamente irrisolvibile.

Nel caso del cilindro e fluido newtoniano, il trascurare i termini inerziali nelle equazioni di moto conduce all'assurdo risultato noto come « paradosso di Stokes » [6].

Per fluidi non Newtoniani, il problema si presenta ancora irrisolvibile dal punto di vista analitico.

TABELLA I.

La funzione di dissipazione nei vari sistemi di coordinate.

Cartesiano ortogonale

$$\Phi_v = 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right]^2 +$$

$$+ \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right]^2 - \frac{2}{3} \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right]^2$$

Cilindrico

$$\Phi_v = 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] +$$

$$+ \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right]^2 + \left[\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right]^2 -$$

$$- \frac{2}{3} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right]^2$$

Sferico

$$\Phi_v = 2 \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right)^2 \right] +$$

$$+ \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right]^2 +$$

$$+ \left[\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v_\phi}{\sin \theta} \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right]^2 + \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\phi}{r} \right) \right]^2 -$$

$$- \frac{2}{3} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right]^2$$

N.B. - La linea tratteggiata si riferisce a termini nulli per fluidi incomprimibili.

Nel moto di fluidi puramente viscosi, caratterizzato da bassi valori del numero di Reynolds, l'unica fonte di dissipazione è quella di tipo viscoso. Noti perciò che siano il campo di moto e la legge reologica del fluido è possibile valutare la potenza dissipata mediante il seguente integrale di volume:

$$(2) \quad P = \int_V \eta \Phi_v \, dV$$

dove

Φ_v denominata appunto funzione di dissipazione, è una opportuna combinazione delle derivate parziali delle componenti di velocità rispetto alle coordinate spaziali, che nei sistemi di riferimento più comuni (cartesiano ortogonale, sferico e cilindrico) assume la forma presentata in Tabella I;

η è la viscosità del fluido, definita dalla relazione tensoriale

$$\tau = -\eta (I_2) \Delta \quad (\text{per fluidi incomprimibili});$$

Δ è il « tensore di velocità di deformazione »;

τ è il componente tangenziale del tensore degli sforzi;

I_2 è l'invariante del 2° ordine del tensore Δ .

Nel caso di fluido Newtoniano η ha un valore indipendente dal campo di moto ed è funzione solo della natura del fluido, della sua temperatura e della sua pressione.

Nel caso più generale, l'indipendenza di η dal campo di moto non è più verificata. I fluidi che presentano tali proprietà prendono il nome di non Newtoniani; data la complessità delle equazioni di moto che ne risultano solo in epoca recente è stato possibile affrontare lo studio quantitativo per moti bidimensionali con l'ausilio di elaboratori elettronici.

In questo lavoro vengono presi in considerazione fluidi schematizzabili dalla legge monomia (secondo il modello di Ostwald-de Waele):

$$(3) \quad \eta = m \Phi_v^{\frac{n-1}{2}}.$$

L'espressione (2) diventa

$$(4) \quad P = m \int_V \Phi_v^{\frac{n+1}{2}} dV.$$

Il fluido Newtoniano si presenta come un caso particolare per $n = 1$.

Volendo ricorrere ad un metodo variazionale ci si può valere del principio di minimo seguente. Si può difatti dimostrare [8] che nelle seguenti ipotesi:

- campo di moto stazionario
- fluido incomprimibile
- termini inerziali inesistenti o comunque trascurabili
- forze esterne derivabili da una potenziale ($\vec{g} = -\text{grad } \Gamma$)
- velocità nota sulle superfici S di contorno del volume V considerato
- η funzione solo di Φ_v

il campo di moto reale è tale da rendere minimo il seguente integrale di volume:

$$(5) \quad B = \int_V F dV$$

dove

$$(6) \quad F = -2(p + \rho\Gamma) \operatorname{div} \vec{v} + \int_0^{\Phi_v} \eta(\Phi_v) d\Phi_v.$$

È facile difatti verificare come le corrispondenti equazioni di Eulero-Lagrange non sono altro che le equazioni di continuità e le tre componenti dell'equazione di moto.

Per affrontare il problema utilizzando direttamente il principio variazionale è possibile quindi operare nel seguente modo:

1) Si scrivono per i profili di velocità delle espressioni contenenti un certo numero di parametri liberi, tali da soddisfare l'equazione di continuità e tutte le condizioni al contorno imposte dalla natura del problema.

2) Si calcola la corrispondente espressione di Φ_v .

3) Tenendo conto delle caratteristiche reologiche e ricordando che $\operatorname{div} \vec{v} = 0$ si calcola

$$(7) \quad B = \int_V \left[\int_0^{\Phi_v} \eta(\Phi_v) d\Phi_v \right] dV$$

4) Sfruttando i gradi di libertà lasciati al problema (parametri liberi di ottimizzazione) si effettua la minimizzazione, ottenendo così dei profili approssimati.

Una volta noto il campo di moto, è possibile calcolare la potenza dissipata tramite la relazione (2).

A commento del metodo impiegato si può dire quanto segue:

1) Nel caso di fluidi tipo « legge di potenza » (e quindi anche Newtoniani) l'applicazione del principio variazionale conduce alla minimizzazione dell'integrale seguente:

$$(8) \quad B = \frac{2}{n+1} m \int_V \Phi_v^{\frac{n+1}{2}} dV$$

il quale, a parte la costante $\frac{2}{n+1}$, inessenziale ai fini della minimizzazione, coincide con l'integrale (2) e cioè colla potenza dissipata in seno al fluido.

2) La soluzione esatta del problema corrisponderebbe ovviamente ad un numero infinito di parametri; in effetti le vere incognite del problema sono le tre componenti di velocità, quali funzioni delle coordinate spaziali, mentre il procedimento adottato ipotizza in partenza un certo andamento funzionale, con un limitato numero di parametri liberi, cui è lasciata semplicemente la possibilità di adeguarsi. Il minimo di B che così si riesce a calcolare è pertanto solo quello relativo alla classe di funzioni scelte.

La bontà del metodo è quindi affidata alla cura con cui si scelgono le equazioni dei profili di velocità, che devono essere abbastanza rappresentativi dell'aspetto fisico del fenomeno. La parte più delicata di una trattazione di questo genere consiste proprio nello stabilire il numero di parametri e il tipo delle funzioni da adottare. Si tratta cioè di trovare un compromesso tra la necessità di rappresentare accuratamente il fenomeno e l'esigenza di contenere il tempo di calcolo entro limiti ragionevoli.

ESEMPI DI APPLICAZIONE.

a) «*Creeping flow*» intorno ad una sfera.

Il caso preso in esame è quello di una sfera di raggio R investita da una corrente uniforme di fluido che a sufficiente distanza dalla sfera stessa si muove con una velocità uniforme V_∞ .

Per effetto della corrente la sfera è soggetta ad una forza di trascinamento F_K diretta come la corrente stessa il cui modulo è calcolabile con la seguente relazione [1]

$$(9) \quad V_\infty F_K = 2 \pi m \int_0^\pi \int_R^\infty \left[\begin{aligned} & 2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 \\ & + 2 \left(\frac{v_r}{r} + \frac{v_\theta \cot \theta}{r} \right)^2 \\ & + \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)^2 \end{aligned} \right]^{\frac{n+1}{2}} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta .$$

È comodo trasformare l'espressione (9) in termini adimensionali. Definiamo perciò

$$(10) \quad \begin{aligned} \xi &= \frac{r}{R} \\ \omega_r &= \frac{v_r}{V_\infty} \\ \omega_\theta &= \frac{v_\theta}{V_\infty} \\ \Phi_v^* &= \Phi_v \cdot \frac{R^2}{V_\infty^2} . \end{aligned}$$

Con queste posizioni la (9) diventa

$$(11) \quad V_\infty F_K = 2 \pi m \left(\frac{V_\infty}{R} \right)^{n+1} R^3 \int_0^\pi \int_1^\infty \left[\begin{aligned} & 2 \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \omega_\theta}{\partial \theta} + \frac{\omega_r}{\xi} \right)^2 \\ & + 2 \left(\frac{\omega_r}{\xi} + \frac{\omega_\theta \cot \theta}{\xi} \right)^2 \\ & + \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\omega_\theta}{\xi} \right) + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \omega_r}{\partial \theta} \right)^2 \end{aligned} \right]^{\frac{n+1}{2}} \xi^2 \sin \theta \, d\xi \, d\theta .$$

Ponendo

$$(12) \quad I(n) = \int_0^\pi \int_1^\infty \left[\begin{aligned} & 2 \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial \xi} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \omega_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\omega_r}{\xi} \right)^2 \\ & + 2 \left(\frac{\omega_r}{\xi} + \frac{\omega_\vartheta \cot \vartheta}{\xi} \right)^2 \\ & + \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\omega_\vartheta}{\xi} \right) + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \omega_r}{\partial \vartheta} \right)^2 \end{aligned} \right]^{\frac{n+1}{2}} \xi^2 \sin \vartheta \, d\xi \, d\vartheta$$

$$(13) \quad f = \frac{F_K}{\frac{1}{2} \rho V_\infty \pi R^2} = \text{fattore d'attrito}$$

$$(14) \quad \text{Re} = \frac{\rho V_\infty^{2-n} D^n}{m} = \text{numero di Reynolds.}$$

Si ottiene

$$(15) \quad f = \frac{2^{3+n} I(n)}{\text{Re}}.$$

Per tener conto immediatamente dell'equazione di continuità, introduciamo, come consuetudine, in questi casi, la funzione di flusso $\psi(r, \vartheta)$ definita dalle relazioni

$$(16) \quad v_r = - \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta}$$

$$(17) \quad v_\vartheta = + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

la quale deve soddisfare le seguenti condizioni al contorno

$$(18) \quad r = R \quad v_r = 0 \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \right|_R = 0$$

$$(19) \quad r = R \quad v_\vartheta = 0 \quad \left. \frac{\partial \psi}{\partial r} \right|_R = 0$$

$$(20) \quad r \rightarrow \infty \quad \psi \rightarrow - \frac{1}{2} V_\infty r^2 \sin^2 \vartheta.$$

Facendo ancora riferimento alle variabili adimensionali già definite, è stata scelta una espressione per la ψ del tipo:

$$(21) \quad \psi^* = \frac{\psi}{V_\infty R^2} = f(\xi) \sin^2 \vartheta$$

che, in virtù delle (12), (16) e (17) fornisce la seguente espressione di $I(n)$

$$(22) \quad I(n) = \int_0^\pi \int_1^\infty \left[\frac{12}{\xi^4} \left(f' - \frac{2f}{\xi} \right)^2 \cos^2 \vartheta + \frac{1}{\xi^4} \left(\xi f'' - 2f' + \frac{2f}{\xi} \right) \sin^2 \vartheta \right]^{\frac{n+1}{2}} \cdot \xi^2 \sin \vartheta \, d\xi \, d\vartheta.$$

Due sono state le forme funzionali provate per la $f(\xi)$:

$$(23) \quad f_1(\xi) = -\frac{1}{2} \xi^2 + \frac{3}{4} \xi - \frac{1}{4\xi} - C_1 \left(\frac{\xi}{2} - \frac{1}{\xi} + \frac{1}{2\xi^3} \right) - \\ - C_2 \left(\frac{1}{2\xi} - \frac{1}{\xi^3} + \frac{1}{2\xi^5} \right)$$

$$(24) \quad f_2(\xi) = \frac{1}{2} \left(\frac{2-k}{h-k} \xi^h + \frac{h-2}{h-k} \xi^k - \xi^2 \right)$$

di cui $h < k$ e $k < 2$ per tener conto della (20)

h, k, C_1 e C_2 sono i parametri rispetto ai quali si effettua la minimizzazione.

Le corrispondenti espressioni di $I(n)$, dopo aver effettuato un cambiamento della variabile di integrazione ($t = 1/\xi$) allo scopo di avere limiti di integrazione finiti, risultano,

$$(25) \quad I_1(n) = \int_0^{\pi} \int_0^1 \left\{ I_2 \left[\frac{3}{4} (1-t^2) + C_1 \left(-\frac{1}{2} + 3t^2 - \frac{5}{2}t^4 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + C_2 \left(-\frac{3}{2}t^2 + 5t^4 - \frac{7}{2}t^6 \right) \right]^2 \cos^2 \vartheta + \left[\frac{3}{2}t^2 + C_1 (-6t^2 + 10t^4) + \right. \right. \\ \left. \left. + C_2 (3t^2 - 20t^4 + 21t^6) \right]^2 \sin^2 \vartheta \right\}^{\frac{n+1}{2}} t^{2(n-1)} \sin \vartheta dt d\vartheta$$

$$(26) \quad I_2(n) = \left[\frac{(2-k)(2-h)}{k-h} \right]^{n+1} \int_0^{\pi} \int_0^1 \left\{ 3(t^{1-k} - t^{1-h})^2 \cos^2 \vartheta + \right. \\ \left. + \frac{1}{4} \left[(1-k)t^{1-k} - (1-h)t^{1-h} \right]^2 \sin^2 \vartheta \right\}^{\frac{n+1}{2}} t^{2(n-1)} \sin \vartheta dt d\vartheta.$$

Condizione necessaria perché $I_2(n)$ esista finito è

$$(27) \quad k < \frac{3n}{n+1}$$

che per $n < 2$ è più restrittiva della condizione $k < 2$. In linea di principio il corrispondente profilo di ψ è applicabile a fluidi caratterizzati da un indice di pseudo plasticità qualsiasi. Condizione necessaria invece perché $I_1(n)$ esista finito è che

$$(28) \quad n > \frac{1}{2}.$$

I corrispondenti profili di velocità sono simili a quelli proposti da Slattery [5].

Si può osservare che per fluidi Newtoniani ambedue i profili scelti possono ridursi alla soluzione esatta di Stokes, per cui

$$(29) \quad k = 1 \quad h = -1 \quad C_1 = C_2 = 0$$

b) « *Creeping flow* » attorno ad un cilindro circolare.

In questo caso si prende in considerazione un cilindro circolare indefinito investito da una corrente di velocità asintotica V_∞ normale al suo asse.

Analogamente a quanto visto per la sfera, la forza di trascinamento F_{1K} per unità di lunghezza è data dalla seguente relazione:

$$(30) \quad F_{1K} V_\infty = 2m \int_0^\pi \int_R^\infty \left[2 \left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 \right]^{\frac{n+1}{2}} + \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\vartheta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \vartheta} \right)^2 r \, dr \, d\vartheta.$$

Facendo ancora ricorso a variabili adimensionali definite dalle (10) e ponendo

$$(31) \quad I(n) = \int_0^\pi \int_1^\infty \left[2 \left(\frac{\partial \omega_r}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{1}{\xi} \frac{\partial \omega_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{\omega_r}{\xi} \right)^2 \right]^{\frac{n+1}{2}} + \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\omega_\vartheta}{\xi} \right) + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \omega_r}{\partial \vartheta} \right)^2 \xi \, d\xi \, d\vartheta$$

$$(32) \quad f = \frac{F_{1K}}{\frac{1}{2} \rho V_\infty^2 D}$$

si giunge a scrivere

$$(33) \quad f = \frac{2^{n+1} I(n)}{\text{Re}}.$$

Anche in questo caso viene introdotta una funzione $\psi(r, \vartheta)$ tale da soddisfare le seguenti condizioni al contorno:

$$(35) \quad r = R \quad v_r = - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \vartheta} \Big|_R = 0$$

$$(35i) \quad r = R \quad v_\vartheta = \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_R = 0$$

$$(36) \quad r \rightarrow \infty \quad v_\vartheta = V_\infty r \sin \vartheta.$$

Analogamente a quanto fatto per la sfera la forma funzionale scelta per la funzione di flusso e la conseguente espressione di $I(n)$ risultano:

$$(37) \quad \psi^* = \frac{\psi}{V_\infty R} = f(\xi) \sin \vartheta$$

$$(38) \quad I(n) = \int_0^\pi \int_1^\infty \left\{ 4 \left(\frac{f}{\xi^2} - \frac{f'}{\xi} \right)^2 \cos^2 \vartheta + \left(f'' - \frac{f'}{\xi} + \frac{f}{\xi^2} \right)^2 \sin^2 \vartheta \right\}^{\frac{n+1}{2}} \cdot \xi \, d\xi \, d\vartheta.$$

Le due espressioni che sono state date a $f(\xi)$ sono:

$$(39) \quad f_1(\xi) = \frac{1-k}{k-h} \xi^h + \frac{h-1}{k-h} \xi^k + \xi$$

con $h < k$, $k < 1$ per tener conto della (36)

$$(40) \quad f_2(\xi) = \left(\xi - \frac{3}{2} + \frac{1}{2\xi^2} \right) + C_1 \left(1 - \frac{2}{\xi^2} + \frac{1}{\xi^4} \right) + C_2 \left(\frac{1}{\xi^2} - \frac{2}{\xi^4} + \frac{1}{\xi^6} \right).$$

Le corrispondenti espressioni di $I(n)$ risultano, ponendo ancora $\xi = 1/t$:

$$(41) \quad I_1(n) = \left[\frac{(k-1)(h-1)}{k-h} \right]^{n+1} \int_0^\pi \int_0^1 t^{-3} \left\{ 4(t^{2-h} - t^{2-k})^2 \cos^2 \vartheta + \right. \\ \left. + [(h-1)t^{2-h} - (k-1)t^{2-k}]^2 \sin^2 \vartheta \right\}^{\frac{n+1}{2}} dt d\vartheta$$

$$(42) \quad I_2(n) = \int_0^\pi \int_0^1 \left\{ 4 \left[\left(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}t^2 \right) + C_1(1 - 6t^2 + 5t^4) + \right. \right. \\ \left. \left. + C_2(3t^2 - 10t^4 + 7t^6) \right]^2 \cos^2 \vartheta + \left[\left(-\frac{3}{2} + \frac{9}{2}t^2 \right) + C_1(1 - 18t^2 + 25t^4) + \right. \right. \\ \left. \left. + C_2(9t^2 - 50t^4 + 49t^6) \right]^2 \sin^2 \vartheta \right\}^{\frac{n+1}{2}} t^{2n-1} dt d\vartheta.$$

Condizione necessaria perché $I_1(n)$ esista finito è che

$$(43) \quad k < \frac{2n}{n+1}$$

la quale limitazione coincide, per il fluido Newtoniano, con quella precedentemente esposta.

Non esiste, al contrario, nessuna limitazione per $I_2(n)$.

METODO DI MINIMIZZAZIONE IMPIEGATO E TEMPO DI CALCOLO.

Il problema che si presenta è quello di rendere minima una funzione abbastanza complessa di due variabili indipendenti (h, k oppure C_1, C_2). Scartati perciò tutti i metodi che richiedono un calcolo analitico o numerico delle derivate, si è preferito ricorrere ad un metodo diretto che, a giudizio degli autori, si presenta in questo caso molto efficace [9].

Avendo come obiettivo principale la valutazione del fattore di attrito, si è scelto come criterio di arresto per la minimizzazione il raggiungimento di uno scarto relativo inferiore a 10^{-4} del valore della funzione B.

Per soddisfare questo criterio si sono rivelate sufficienti mediamente 40 iterazioni, corrispondenti ad un tempo di calcolo di circa 10 sec. su un elaboratore UNIVAC 1108.

RISULTATI OTTENUTI.

Si riportano qui di seguito i risultati ottenuti:

Sfera: il programma di calcolo è stato collaudato confrontando il risultato numerico ottenuto su fluidi Newtoniani con il risultato esatto fornito dalla teoria di Stokes. Per ambedue le funzioni provate, si è trovato un valore della costante $f \cdot Re$ in ottimo accordo con quello teorico (24,01 e 24,04 contro 24,00). Il leggero scarto, del resto insignificante, può essere attribuito

ad errori numerici introdotti nel calcolo dell'integrale, che è stato effettuato dividendo il dominio di integrazione (t, ϑ) secondo un reticolo a maglie rettangolari e calcolando il valore della funzione integranda nel punto centrale. Il numero di passi nelle due direzioni è di 20, per un totale di 400 maglie.

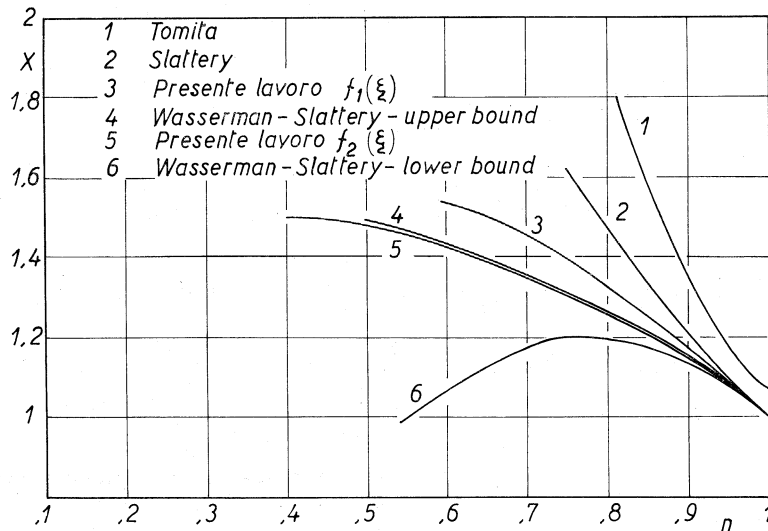


Fig. 1. - Sfera: X in funzione dell'indice n di pseudoplasticità.

In fig. 1 è diagrammata, in funzione dell'indice n di pseudoplasticità, la grandezza $X(n)$, direttamente collegata al fattore di attrito tramite la seguente posizione

$$(44) \quad f = \frac{24X(n)}{\text{Re}}$$

Nella stessa figura sono riportati per confronto i risultati ottenuti da altri autori [1], [5], [10].

Va osservato che con un procedimento di minimizzazione come quello adottato si può a rigore affermare che il fattore di attrito è al massimo eguale al valore che si è calcolato, ma che non si può affermare di quanto gli sia inferiore. In altre parole, si può dire che il valore calcolato costituisce un limite superiore, e che è tanto più prossimo al valore « vero » quanto più i profili scelti sono in grado di rappresentare la realtà. È questo il motivo che ha suggerito di provare due espressioni diverse per la funzione f , per controllare cioè se fosse possibile migliorare i risultati ottenuti con la $f_1(\xi)$. In effetti i risultati del calcolo mostrano per la $f_2(\xi)$ dei valori del fattore di attrito sensibilmente inferiori, e quindi più attendibili di quanto calcolato con la $f_1(\xi)$. Anche i più recenti calcoli eseguiti da Wasserman e Slattery [1] forniscono risultati molto prossimi, per quanto leggermente superiori, il che può forse lasciare presumere che il fattore di attrito reale non sia poi molto inferiore.

TABELLA II.

n	$\psi^* = f_1(\xi) \sin^2 \vartheta$				$\psi^* = f_2(\xi) \sin^2 \vartheta$			
	h	k	f·Re	X	C ₁	C ₂	f·Re	X
1,6	-0,927	1,749	3,76	0,157	—	—	—	—
1,4	-1,029	1,577	9,25	0,385	—	—	—	—
1,2	-1,115	1,349	16,52	0,69	—	—	—	—
1	-1,141	1,025	24,04	1	-0,006	0,022	24,02	1
0,9	—	—	—	—	0,238	-0,182	27,61	1,15
0,8	-1,166	0,557	30,31	1,27	0,543	-0,424	31,28	1,31
0,7	—	—	—	—	0,892	-0,673	34,51	1,44
0,6	-1,315	-0,099	34,61	1,44	1,222	-0,841	36,58	1,52
0,5	—	—	—	—	—	—	—	—
0,4	-1,560	-1,157	36,70	1,53	—	—	—	—

“Creeping flow” attorno ad una sfera: valore della costante $f \cdot \text{Re}$ e dei parametri di ottimazione in funzione dell'indice n per le due espressioni di ψ^* prese in considerazione.

Nella Tabella II si riportano i valori dei parametri adattivi e le costanti $f \cdot \text{Re}$ per i vari casi presi in considerazione.

Nel caso di fluidi Newtoniani i parametri assumono valori in accordo con il loro valore teorico. Solo per h si nota un leggero scarto di circa il 15 % attribuibile vuoi all'errore connesso con l'integrazione numerica, vuoi all'arresto della minimizzazione. V'è infatti da rilevare che, analogamente a quanto capita anche in altri casi in cui si utilizzano i metodi variazionali, la funzione $I(n)$ presenta un minimo poco marcato, per cui nei metodi di minimizzazione si riesce a coglierne facilmente il valore numerico, ma non altrettanto bene i valori dei parametri. Quanto a fondo si debba spingere la minimizzazione dipende perciò dallo scopo che ci si prefigge e poiché nel caso presente l'obiettivo è stato la valutazione del fattore di attrito, il grado di accuratezza raggiunto è stato giudicato sufficiente.

Cilindro: le ipotesi che sono alla base dell'applicazione del metodo variazionale per il calcolo del moto viscoso di fluido sono le stesse che, nel caso di cilindro indefinito, conducono al paradosso di Stokes, quando se ne voglia affrontare lo studio con metodi analitici. È noto che tale paradosso viene meno, non appena si elimini una delle ipotesi o si introduca un qualche elemento di « disturbo ». In effetti, è stato possibile giungere ad una soluzione analitica introducendo i termini inerziali, sia pure in forma linearizzata (soluzione di Oseen) o prendendo in considerazione cilindri di lunghezza non infi-

nita, per quanto elevata. Si è supposto, ed è stato confermato dai calcoli, che fosse possibile giungere ad un risultato non paradossale introducendo per la funzione di flusso delle espressioni approssimate, di struttura opportuna.

In effetti la prima espressione proposta per la $f(\xi)$ non è in grado di rimuovere il paradosso di Stokes per i seguenti motivi:

1) Nel caso del fluido newtoniano l'espressione degenera (per $h = k = 1$) verso la funzione di flusso corrispondente ad un campo di moto uniforme, e quindi non dissipativo.

2) Nel caso del fluido pseudoplastico, e anche per quello Newtoniano, nel corso della minimizzazione il parametro k si è portato sul vincolo rappresentato dalla (43), il che corrisponde concettualmente a calcolare l'integrale di una funzione tipo $1/X$ nell'intervallo $0 \rightarrow 1$. Si ritrova, in tal modo, il termine logaritmico tipico del paradosso di Stokes.

Dato il calcolo numerico dell'integrale si ottiene però un risultato numerico determinato, il quale è tuttavia sensibile al passo di integrazione e sostanzialmente privo di significato.

La seconda espressione proposta non ha invece questa caratteristica e può effettivamente fornire un valore del fattore di attrito anche per un fluido newtoniano.

In Tabella III sono presentati i valori numerici del fattore di attrito e dei parametri di ottimazione.

TABELLA III.

n	$\psi^* = f_2(\xi) \sin \theta$			
	C_1	C_2	$f \cdot Re$	X
1,2	-0,773	0,615	9,05	0,84
1	-0,733	0,600	10,78	1
0,9	-0,701	0,584	11,93	1,11
0,8	-0,653	0,557	13,34	1,24
0,7	-0,582	0,517	15,10	1,40
0,6	-0,476	0,454	17,31	1,61
0,5	-0,315	0,360	20,08	1,93
0,4	-0,073	0,206	23,49	2,18
0,3	0,420	-0,199	27,33	2,53

"Creeping flow" attorno ad un cilindro circolare indefinito investito da una corrente normale al suo asse: valore della costante $f \cdot Re$ e dei parametri di ottimazione in funzione dell'indice n .

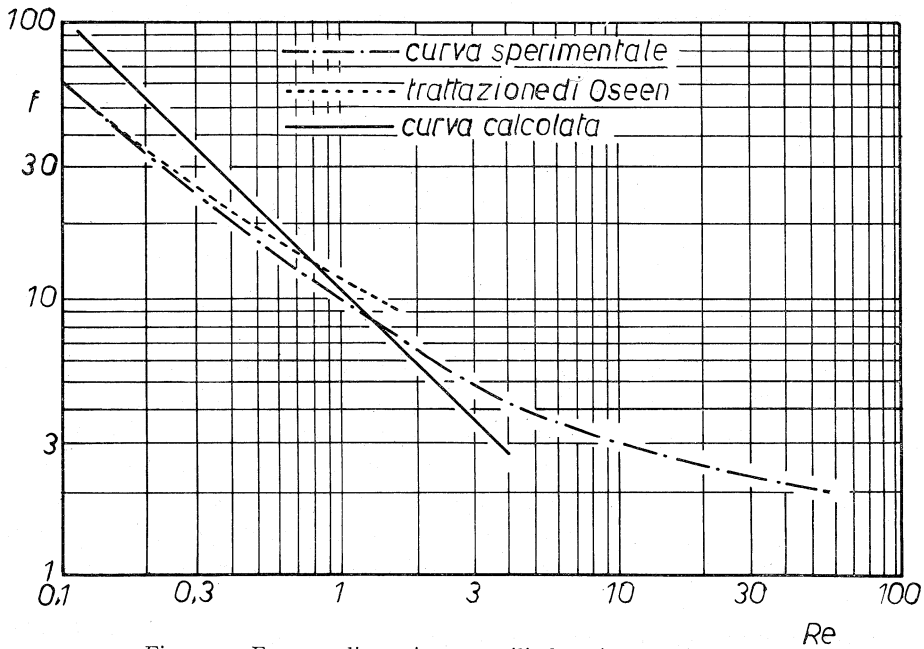


Fig. 2. - Fattore di attrito per cilindro circolare indefinito in funzione del numero di Reynolds: fluido Newtoniano.

In fig. 2 è riportato un confronto della soluzione per il fluido Newtoniano, con i dati sperimentali [3] e la soluzione di Oseen [7] [11] che, come è noto, ha la seguente forma:

$$(45) \quad f = \frac{8\pi}{Re \ln \frac{7.4}{Re}}$$

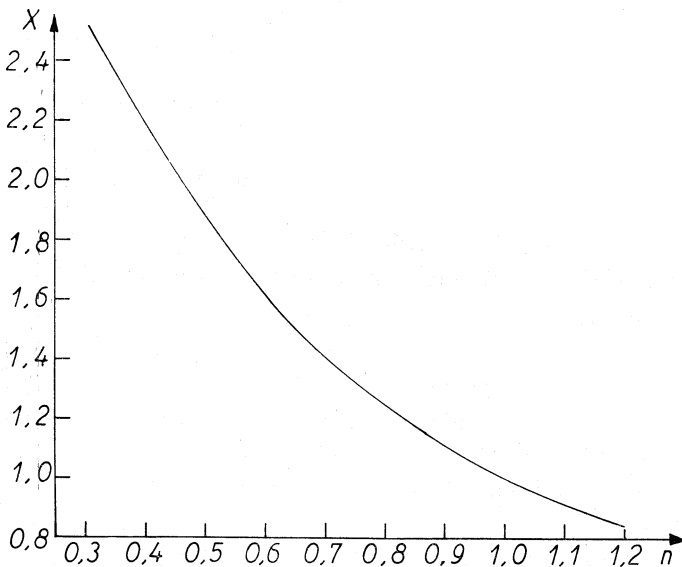


Fig. 3. - Cilindro circolare indefinito: X in funzione dell'indice n di pseudoplasticità.

In fig. 3 è diagrammato, in funzione dell'indice n di pseudoplasticità, la grandezza X , direttamente collegata al fattore di attrito tramite la seguente posizione

$$(46) \quad f = \frac{\text{cost}}{\text{Re}} = \frac{10,78 \cdot X}{\text{Re}}$$

dove 10,78 è il valore trovato per il caso Newtoniano.

CONCLUSIONI.

In questo lavoro è stato studiato il moto di un fluido non Newtoniano con modello reologico del tipo Ostwald-de Waele attorno a sfere e cilindri circolari indefiniti investiti da una corrente di velocità asintotica V_∞ , con particolare riferimento alla forza idrodinamica di resistenza che ne deriva.

Il problema è stato affrontato con un metodo variazionale, ottenendo, per i casi in cui sono disponibili, dei risultati in accordo con i dati riportati da altri autori; nel caso del cilindro indefinito si è anche potuto rimuovere il paradosso di Stokes.

Si può perciò affermare che l'applicazione di metodi di soluzione numerica ispirati a principi variazionali - quando sia possibile - costituisce un ottimo strumento nello studio di fenomeni complessi e in tutti quei casi in cui la risoluzione dell'equivalente sistema differenziale si presenti oltremodo ostica o comunque gravosa.

SIMBOLOGIA.

Lettere latine.

B	grandezza definita dalla (5)
C_1, C_2	variabili di ottimazione
D	diametro della sfera o del cilindro
F	grandezza definita dalla (6)
f	fattore di attrito, definito dalla (13) per la sfera e dalla (32) per il cilindro
F_K	Forza resistente agente sulla sfera
F_{1K}	Forza resistente per unità di lunghezza agente sul cilindro
\vec{g}	Forza esterna per unità di massa
h	variabile di ottimazione
k	variabile di ottimazione
$I(n)$	grandezza definita dalla (22) per la sfera e dalla (31) per il cilindro
m	costante di viscosità
n	indice di pseudoplasticità
p	pressione
R	raggio della sfera e del cilindro
r	coordinata radiale

Re	numero di Reynolds, definito dalla (14)
t	variabile di integrazione
V	volume di fluido
V_∞	velocità asintotica del fluido
v_r	velocità radiale del fluido
v_θ	velocità tangenziale del fluido
\vec{v}	velocità del fluido
X	grandezza definita dalla (44) per la sfera e dalla (46) per il cilindro.

Lettere greche.

Γ	potenziale delle forze di massa agenti sul fluido
Δ	tensore di velocità di deformazione
η	viscosità del fluido
θ	coordinata angolare
ξ	coordinata radiale adimensionale definita dalla (10)
ρ	densità del fluido
τ	tensore degli sforzi tangenziali
Φ_v	funzione di dissipazione (ved. Tabella I)
Φ_v^*	funzione di dissipazione adimensionale, definita dalla (10)
ψ	funzione di flusso
ψ^*	funzione di flusso adimensionale, definito dalla (21) per la sfera e dalla (37) per il cilindro
ω_r	velocità radiale adimensionale del fluido, definita dalla (10)
ω_θ	velocità tangenziale adimensionale del fluido, definita dalla (10).

BIBLIOGRAFIA.

- [1] M. L. WASSERMAN e J. C. SLATTERY, *Upper and Lower Bounds on the Drag Coefficient of a Sphere in a Power-Model Fluid*, «A.I.Ch.E. Journal», 10, n. 3, 383 (1964).
- [2] B. A. FINLAYSON e L. E. SCRIVEN, *On the Search for Variational Principle*, «International Journal of Heat and Mass Transfer», 10, 799 (1967).
- [3] H. SCHLICHTING, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill- New York 1960.
- [4] A. FARAROUÏ e R. C. KINTNER, «Trans. Soc. Rheol.», 5, 369 (1961).
- [5] J. C. SLATTERY, *Approximations on the Drag Force on a Sphere Moving Slowly Through Either an Ostwald-DeWaele or a Sisko Fluid*, «A.I.Ch.E. Journal», 8, n. 5, 663, Nov. 1962.
- [6] G. BIRKHOFF, *Hydrodynamics*, Dover New York 1955.
- [7] OSEEN C. W. *Über die Stokessche Formel und über die verwandte Aufgabe in der Hydrodynamik*, «Arkiv for matematik astronomi och fysik», 6, n. 29 (1910).
- [8] R. B. BIRD, W. E. STEWART e E. B. LIGHTFOOT, *Transport Phenomena*, Wiley 1960.
- [9] G. BUZZI FERRARIS, *Metodo automatico per trovare l'ottimo di una funzione*, Nota I e II, «Quaderni dell'Ingegnere Chimico Italiano», Vol. 4, n. 12, dicembre 1968.
- [10] TOMITA e YUKIO, «Bull. J.S.M.E.», 2, 469 (1959).
- [11] H. LAMB, *Hydrodynamics*, Dover 1945.
- [12] A. H. P. SKELLAND, *Non Newtonian Flow and Heat Transfer*, Wiley 1967.