Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Robert L. Davis

Note sur les relations difonctionelles

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.2, p. 144–146.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_2_144_0>

Matematica. — *Note sur les relations difonctionelles.* Nota di ROBERT L. DAVIS, presentata (*) dal Socio B. SEGRE.

RIASSUNTO. — Si mostra che una condizione necessaria e sufficiente data da Pic e Purdea [1] dev'essere ritoccata e se ne stabilisce un'altra più semplice.

Le but principal d'un article de Pic et Purdea récemment paru dans ces comptes rendus [1] était de donner une condition nécessaire et suffisante pour que le produit RS de deux relations difonctionnelles serait à son tour difonctionelle. En l'occurrence, les auteurs n'ont donné aucune démonstration de la nécessité, se contentant d'un exemple qui montre seulement que si R et S ne sont pas soumises à la condition visée le produit n'est pas forcément difonctionelle. C'est dommage qu'une imprécision dans l'énoncé de cette condition l'empeche toutefois d'être suffisante.

Nous voudrions à la fois donner ici des précisions qui corrigeront l'énoncé de la condition de Pic et Purdea et, en plus, présenter une nouvelle condition nécessaire et suffisante qui nous paraît beaucoup plus simple que la leur.

* * *

J. Riguet a appelé « difonctionelles » [2] les relations $R \subset U \times V$ telles que $RR'R = R$, et là–dessus il a démontré qu'une relation R est difonctionelle si et seulement si R soit reunion $R = \cup_{i \in I} A_i \times B_i$ de rectangles dont les projections sont deux à deux disjointes. (Dans ce qui suit nous nous permettrons d'adopter une notation légèrement à l'écart de celle de Riguet. D'abord, $x\,(RS)\,y$ signifiera qu'il existe un z tel que xRz et zSy; puis, R' désignera la relation dite « inverse » a $R : xR'y$ veut dire yRx. Enfin, pour les ensembles il sera convenable d'indiquer par $A \| B$ le fait que A et B sont disjoints, $A \cap B = \Phi$, et le contraire par $A \not\parallel B$).

La condition de Pic et Purdea s'exprimait, comme on pourrait s'y attendre, à partir des decompositions rectangulaires $R = \cup_{i \in I} A_i \times B_i$ et $S = \cup_{j \in J} B'_j \times C_j$. Ces auteurs ont designé par $I' = \{i \in I \mid \exists j \in J \text{ , } B_i \not\parallel B'_j\}$ et $J' = \{j \in J \mid \exists i \in I \text{ , } B_i \not\parallel B'_j\}$ pour affirmer que RS serait une relation difonctionelle, et ici nous citons, « si et seulement si l'on peut trouver des décompositions $I' = \cup_{k \in K} I_k$ et $J' = \cup_{k \in K} J_k$ telles que $I_{k_1} \cap I_{k_2} = 0$ et $J_{k_1} \cap J_{k_2} = 0$ si $k_1 \neq k_2$ et $B_{i_k} \cap B'_{j_k} \neq 0$ où $i_k \in I_k$, $j_k \in J_k$ ».

Or, le lecteur pourra vérifier sans peine que les relations

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(*) Nella seduta del 14 febbraio 1970.

ayant pour décompositions rectangulaires $A_1 = \{1\}$, $A_2 = \{3\}$, $B_1 = \{1, 3\}$, $B_2 = \{2, 4\}$, et $B_1' = \{1, 4\}$, $B_2' = \{2\}$, $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2\}$, satisfont à la condition donnée, alors que leur produit

$$RS = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas difonctionelle.

Toutefois, il n'en manque dans l'expression de cette condition qu'une *précision ultérieure*: à savoir, que si $k \neq m$ avec $i_k \in I_k$, $j_m \in J_m$ on aura $B_{i_k} \| B_{j_m}$. Pour les décompositions $I' = \{1\} \cup \{2\} = J'$ on s'aperçoit que $B_1 \#\!\!\not\; B_1'$ et $B_2 \#\!\!\not\; B_2'$ dans l'exemple ci-dessus, comme exige la condition de Pic et Purdea, mais le produit ne pourrait pas être difonctionelle parce que $B_2 \#\!\!\not\; B_1'$.

PROPOSITION. *Si les relations difonctionelles* R *et* S *satisfont à la fois aux conditions de Pic et Purdea et à cette condition supplémentaire, alors le produit* RS *est une relation difonctionelle.*

En présence de cette condition supplémentaire, la démonstration de Pic et Purdea pourrait servir sans grande modification pour démontrer la proposition, qui n'est qu'une précision de la leur. Cela dit, il serait néanmoins éclairant de chercher un critère plus simple et plus économique en se rendant compte non seulement des décompositions rectangulaires, mais aussi de la propriété déterminative de la définition donnée par Riguet. Par cette voie nous pourrons atteindre à une condition plus simple et plus convenable au calcul, et dont la démonstration dégagera le sens du critère de Pic et Purdea.

THÉORÈME. *Soient* $R = \bigcup_{i \in I} A_i \times B_i \subset U \times V$ *et* $S = \bigcup_{j \in J} C_j \times D_j \subset V \times W$ *deux relations difonctionelles. Pour que leur produit* RS *soit difonctionelle il faut et il suffit que chaque fois que* $B_i \#\!\!\not\; C_j$, $C_j \#\!\!\not\; B_k$, *et* $B_k \#\!\!\not\; C_m$ *on aura* $C_m \#\!\!\not\; B_i$.

Démonstration. Nous établirons que si R et S satisfont à cette condition, alors $RS\,(RS)'\,RS = RS$, ce qui revient à dire que $R\,(SS')\,(R'R)\,S \subset RS$. Il est évident, d'après les décompositions rectangulaires, que $uSS'v$ veut dire qu'il existe un $j \in J$ tel que u et v sont tous deux membres de C_j et, de même, que $vR'Rw$ si et seulement s'il existe un $k \in I$ avec $v, w \in B_k$. Alors, dire que $xR\,(SS')\,(R'R)\,Sy$ équivaut à dire qu'il existe des u, v, w pour lesquels xRu, wSy, et u et v sont membres de C_j tandis que v et w sont membres de B_k.

Or, xRu nous dit qu'il existe un i pour lequel $x \in A_i$ et $u \in B_i$; wSy qu'il existe un m avec $w \in C_m$ et $y \in D_m$. Par conséquent nous pouvons conclure que les conditions préalables du théorème sont satisfaites, parceque $u \in B_i \cap C_j$, $v \in C_j \cap B_k$, et $w \in B_k \cap C_m$. Donc il existe un $z \in C_m \cap B_i$ et alors $x\,(A_i \times B_i)\,z$, $z\,(C_m \times D_m)\,y$; il en resulte que xRz et zSy, et alors $xRSy$: la condition est suffisante.

La nécessité de cette condition s'ensuit de même, parceque s'il existe des indices i, j, k et m pour lesquels $B_i \# C_j$, $C_j \# B_k$ et $B_k \# C_m$ mais $C_m \| B_i$ alors il existe des x, y avec $x R (SS') (R' R) S y$, mais $(x, y) \notin RS$.

BIBLIOGRAFIE.

[1] G. PIC et I. PURDEA, *Quelques propriétés des treillis des relations difonctionelles*, « Rendiconti Acad. Naz. Lincei », *45*, 117–121 (1968).

[2] J. RIGUET, *Relations binaires, fermetures, correspondances de Galois*, « Bull. Math. Soc. France », *76*, 114–155 (1948).