Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Gheorghe Gheorghiev, Margareta Ignat

Su alcuni moti intrinseci notevoli della magnetoidrodinamica. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **48** (1970), n.2, p. 215–219.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_2_215_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

Magnetoidrodinamica. — *Su alcuni moti intrinseci notevoli della magnetoidrodinamica.* Nota II di GHEORGHE GHEORGHIEV e MARGARETA IGNAT, presentata [(*)] dal Socio C. AGOSTINELLI.

SUMMARY. — Using the results of Note I, a study is made of the helicoidal motions in which the vorticity vector is parallel to the velocity vector, and the conduction current vector is parallel to the magnetic field. That is to say, the field concerned is one of *free force*, important for astrophysical applications. Finally, the so-called quasi-rigid motions are studied, where the deformation tensor of the velocities cancels out.

Con riferimento ai risultati della Nota I e continuando con la stessa numerazione dei paragrafi e delle formule, consideriamo in questa seconda Nota i moti magnetoidrodinamici elicoidali e i moti quasi rigidi.

5. *Moti elicoidali.*

Definizione. Si chiamano moti elicoidali nella MHD quelli per i quali entrambi i campi fondamentali sono elicoidali, cioè:

$$\left\{\begin{array}{lll} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v} & , & (\lambda \neq 0) \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mu \mathbf{H} & , & (\mu \neq 0). \end{array}\right. \tag{21}$$

Quanto alla seconda condizione essa esprime l'annullamento della forza elettromagnetica $[\boldsymbol{j}, \mathbf{H}] = [\operatorname{rot} \mathbf{H}, \mathbf{H}]$, ciò che costituisce l'approssimazione del campo senza forza (free–force, [5], [8] [(1)]) importante soprattutto per le sue applicazioni astrofisiche.

Essendo: $\boldsymbol{v} = v\mathbf{I}_1$, $\mathbf{H} = \mathrm{H}\mathbf{I}_2$, usando le formole (11), la prima condizione delle (21) ci dà:

$$\begin{gathered}[-(q_2 + r_3) - (\ln v)_3 \cos\theta]\, \mathbf{I}_1 + [q_1 + (\ln v)_3]\, \mathbf{I}_2 + \\ + [r_1 + (\ln v)_1 \cos\theta - (\ln v)_2]\, \mathbf{I}_3 = \lambda \mathbf{I}_1 ,\end{gathered}$$

donde:

$$(\ln v)_2 = r_1 + (\ln v)_1 \cos\theta \quad ; \quad (\ln v)_3 = -q_1 \quad ; \quad \lambda = \cos\theta\, q_1 - q_2 - r_3 . \tag{22}$$

Procedendo analogamente con la (21_2) in seguito ai calcoli si arriva al sistema d'equazioni:

$$(\ln \mathrm{H})_1 = \cos\theta\, (\ln \mathrm{H})_2 - r_2' \quad ; \quad (\ln \mathrm{H})_3 = p_2 \quad ; \quad \mu = p_2 \cos\theta - p_1 - r_3' . \tag{23}$$

Per i fluidi incompressibili avendo $\operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0$, e siccome pure $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$, alle equazioni precedenti (22) e (23) si aggiungono le seguenti:

$$\left\{\begin{array}{l} (\ln v)_1 = q_3 - \dfrac{1}{\sin^2\theta}\,(r_2 - r_1 \cos\theta) , \\[2ex] (\ln \mathrm{H})_2 = -p_3 + \dfrac{1}{\sin^2\theta}\,(r_1' - \cos\theta\, r_2') . \end{array}\right. \tag{24}$$

(*) Nella seduta del 10 gennaio 1970.

(1) Per tutte le citazioni bibliografiche vedi Nota I, questi « Rendiconti », vol. XLVIII, fasc. 1, p. 57 (1970).

Quindi, i moti incompressibili elicoidali nella MHD si esprimono in succinto per mezzo di:

$$
(25)\quad \begin{cases} \nabla(\ln v) = \left[q_3 - \dfrac{(r_2 - r_1\cos\theta)}{\sin^2\theta}\right]\mathbf{I}^1 + \left[q_3\cos\theta - \dfrac{(r_2\cos\theta - r_1)}{\sin^2\theta}\right]\mathbf{I}^2 - q_1\,\mathbf{I}^3, \\ \nabla(\ln \mathrm{H}) = \left[-\cos\theta\, p_3 + \dfrac{(r_1'\cos\theta - r_2')}{\sin^2\theta}\right]\mathbf{I}^1 + \\ \qquad + \left[-p_3 + \dfrac{(r_1' - r_2'\cos\theta)}{\sin^2\theta}\right]\mathbf{I}^2 + p_2\,\mathbf{I}^3. \end{cases}
$$

Le due relazioni che non sono state incluse qui, ci danno interpretazioni geometriche per i fattori λ e μ delle (21); precisamente essi sono le torsioni della varietà nonolonoma ortogonali ai campi fondamentali.

Le rimanenti equazioni della MHD, cioè le (I_1) e (I_3) del n. 3, nelle nostre notazioni, tenendo conto delle (21), diventano:

$$
\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \nabla \mathrm{L}' \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \mathrm{rot}\,(\alpha \mathbf{I}_3) = 0\,,
$$

dove: $\mathrm{L}' \equiv \mathrm{L} - v^2/2$; $\alpha \equiv v\mathrm{H}\sin\theta$.

Dopo calcoli laboriosi essi ci conducono alle seguenti equazioni scalari:

$$
\begin{cases} \mathrm{H}r_t' - (\alpha_2 + \alpha p_3)\sin\theta = 0\,, \\ \mathrm{H}_t\sin^2\theta + \mathrm{H}r_t'\cos\theta + (\alpha q_3 - \alpha_1)\sin\theta = 0\,, \\ p_t = v\,(p_1 + q_2) \quad ; \quad (\lambda v)_t = 0 \quad ; \quad q_t = r_t = 0\,. \end{cases}
$$

Le ultime due hanno un'interpretazione immediata, precisamente la direzione del campo della velocità non dipende dal tempo.

Ora, dopo aver fissato il riferimento, e dopo aver ottenuto l'espressione di tutte le condizioni imposte da (21) e dalle equazioni del moto, possiamo rispondere alla domanda se esistono moti elicoidali nella MHD e quale è l'arbitrarietà delle soluzioni regolari. A questo scopo, considereremo il seguente sistema Pfaff che risulta dalle relazioni precedenti:

$$
\begin{cases} p = p_1\,\omega^1 + p_2\,\omega^2 + p_3\,\omega^3 + v\,(p_1 + q_2)\,\mathrm{d}t\,, \\ q = q_1\,\omega^1 + q_2\,\omega^2 + q_3\,\omega^3 \quad ; \quad r = r_1\,\omega^1 + r_2\,\omega^2 + r_3\,\omega^3\,, \\ r' = r_1'\,\omega^1 + r_2'\,\omega^2 + r_3'\,\omega^3 + v\,(r_1 + r_1' + q_3\cos\theta\sin^2\theta)\,\mathrm{d}t\,, \\ \mathrm{d}(\ln\mathrm{H}) = \left[-p_3\cos\theta + \dfrac{(r_1'\cos\theta - r_2')}{\sin^2\theta}\right]\omega^1 + \\ \qquad + \left[-p_3 + \dfrac{(r_1' - r_2'\cos\theta)}{\sin^2\theta}\right]\omega^2 + p_2\,\omega^3 - \\ \qquad - v\left\{p_3\cos\theta + q_3\cos^2\theta + \dfrac{[r_2 + r_2' + (r_1 + r_1')\cos\theta]}{\sin^2\theta}\right\}\mathrm{d}t\,, \end{cases}
$$

che studieremo nelle ipotesi:

a) il caso generico dei moti elicoidali non stazionari,

b) il caso dei moti non stazionari quando i campi fondamentali sono ortogonali,

c) il caso generico dei moti elicoidali in regime permanente.

Indagando se il sistema Pfaff rispettivo è in involuzione si determinano i seguenti elementi:

$$\begin{array}{lllllll} a)\ n=4 & ; & s_0=6 & ; & N=13 & ; & s_1=6 \ ;\ s_2=5 \ ;\ s_3=2. \\ b)\ n=4 & ; & s_0=5 & ; & N=10 & ; & s_1=5 \ ;\ s_2=4. \\ c)\ n=3 & ; & s_0=6 & ; & N=\ 9 & ; & s_1=6 \ ;\ s_2=3. \end{array}$$

In tutti i casi considerati abbiamo soluzioni regolari le quali: in *a*) dipendono da due funzioni a 3 argomenti; in *b*) dipendono da 4 funzioni a due argomenti e infine nel *c*) dipendono da 3 funzioni a due argomenti.

6. *Moti quasi–rigidi.*

Definizione. Un moto magnetoidrodinamico si dice quasi–rigido quando il tensore della deformazione della velocità $\dot{\mathrm{S}}(\boldsymbol{v})$ si annulla [7].

Avendo $\boldsymbol{v} = v\mathbf{I}_1$ il differenziale covariante della velocità sarà dato da:

$$d\boldsymbol{v} = dv\mathbf{I}_1 + v\,(r\mathbf{I}^2 - q\mathbf{I}^3)\,,$$

la quale può essere scritta pure:

$$d\boldsymbol{v} = \left(dv - \frac{vr\cos\theta}{\sin^2\theta}\right)\mathbf{I}_1 + \frac{vr}{\sin^2\theta}\,\mathbf{I}_2 - vq\,\mathbf{I}_3\,. \tag{26}$$

Le componenti controvarianti saranno i coefficienti delle $\mathbf{I}_j$. Poiché: $d\mathbf{M} = \omega^j\,\mathbf{I}_j = \omega_h\,\mathbf{I}^h$, avremo:

$$\omega^1 = \frac{\omega_1 - \cos\theta\omega_2}{\sin^2\theta} \quad ; \quad \omega^2 = \frac{\omega_2 - \omega_1\cos\theta}{\sin^2\theta} \quad ; \quad \omega^3 = \omega_3$$

e allora:

$$df = \frac{f_1 - f_2\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\omega_1 + \frac{f_2 - f_1\cos\theta}{\sin^2\theta}\,\omega_2 + f_3\,\omega^3\,.$$

Usando (26) viene valutata subito la derivata controvariante della velocità; la sua parte simmetrica, cioè il tensore della deformazione, avrà le componenti:

$$\left\{\begin{aligned} \dot{S}^{11} &= \frac{1}{\sin^2\theta}\left[v_1 - v_2\cos\theta - \frac{v\cos\theta}{\sin^2\theta}(r_1 - r_2\cos\theta)\right], \\ \dot{S}^{12} &= \frac{1}{2\sin^2\theta}\left[v_2 - v_1\cos\theta - \frac{v\cos\theta}{\sin^2\theta}(r_2 - r_1\cos\theta) + \frac{v\,(r_1 - r_2\cos\theta)}{\sin^2\theta}\right], \\ \dot{S}^{13} &= \frac{1}{2}\left[v_3 - \frac{v\cos\theta}{\sin^2\theta}\,r_3 - \frac{v\,(q_1 - q_2\cos\theta)}{\sin^2\theta}\right], \\ \dot{S}^{22} &= \frac{v}{\sin^2\theta}\,(r_2 - r_1\cos\theta)\,, \\ \dot{S}^{23} &= \frac{v}{2\sin^2\theta}\,(r_3 - q_2 + q_1\cos\theta)\,, \\ \dot{S}^{33} &= -\,v\,q_3\,. \end{aligned}\right.$$

La condizione $\dot{S}(\boldsymbol{v}) = 0$, ci dà le seguenti relazioni:

$$(27) \qquad \begin{array}{lll} q_3 = 0 \quad ; & r_2 = r_1 \cos\theta \quad ; & r_3 = q_2 - q_1 \cos\theta \, ; \\ (\ln v)_1 = 0 \quad ; & (\ln v)_2 = -r_1 \quad ; & (\ln v)_3 = q_1 \, . \end{array}$$

Le ultime tre si esprimono in modo suggestivo:

$$\nabla(\ln v) = q_1 \mathbf{I}^3 - r_1 \mathbf{I}^2 = \frac{\partial \mathbf{I}_1}{\partial \omega^1} \, ,$$

ciò significa che il gradiente del logaritmo della grandezza della velocità è collineare con la normale principale alla linea di corrente, mentre la sua grandezza è uguale alla curvatura di questa linea.

Dalle (27), come era da aspettarsi, si ha $\operatorname{div} \boldsymbol{v} \equiv 0$. Dunque, per lo studio del problema dei moti lenti quasi–rigidi nella MHD, dobbiamo aggiungere le relazioni (27) alle formole fondamentali (II) del numero 3; potremo allora indagare l'esistenza e l'arbitrarietà delle soluzioni regolari di questo sistema ecc.

Dalle (27) si ricavano immediatamente le formole notevoli:

$$\frac{\sin\theta}{2v} \operatorname{rot} \boldsymbol{v} = q_1 \mathbf{I}_2 - q_2 \mathbf{I}_1 + r_1 \mathbf{I}_3 \qquad ; \qquad [\boldsymbol{v} \, , \operatorname{rot} \boldsymbol{v}] = \nabla v^2 \, .$$

La prima mostra che l'espressione cinematica del primo membro ha un carattere puramente geometrico, mentre dalla seconda risulta l'esistenza di una famiglia di superfici di Bernoulli per il campo della velocità nel caso dei moti stazionari.

È degno di segnalare che per questi movimenti dalla (I_3) si ricava subito l'esistenza di una seconda famiglia di superfici di Bernoulli per il campo magnetico e dalla (II_3) l'esistenza di una terza famiglia di superfici inviluppata dai piani determinati da $\boldsymbol{v}$ e $\mathbf{H}$ in ciascun punto.

Pensiamo che presenti interesse lo studio dei moti quasi–rigidi per i quali pure il tensore di deformazione del campo magnetico si annulla, cioè $\dot{S}(\mathbf{H}) = 0$. Questi moti potranno essere chiamati completamente quasi–rigidi. Partendo dalla $\mathbf{H} = \mathrm{H}\mathbf{I}_2$ e seguendo i calcoli analoghi a quelli precedenti si stabiliscono le condizioni:

$$(28) \qquad \left\{ \begin{array}{lll} p_3 = 0 \quad ; & r'_1 = r'_2 \cos\theta \quad ; & r'_3 = p_1 - p_2 \cos\theta \, ; \\ (\ln \mathrm{H})_1 = r'_2 \quad ; & (\ln \mathrm{H})_2 = 0 \quad ; & (\ln \mathrm{H})_3 = -p_2 \, . \end{array} \right.$$

Anche qui le ultime tre possono essere scritte brevemente:

$$\nabla(\ln \mathrm{H}) = r'_2 \mathbf{I}^1 - p_2 \mathbf{I}^3 = \frac{\partial \mathbf{I}_2}{\partial \omega^2} \, ,$$

con la relativa interpretazione.

Avremo pure evidentemente:

$$[\operatorname{rot} \mathbf{H} \, , \mathbf{H}] = \nabla \mathrm{H}^2 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{div} \mathbf{H} \equiv 0 \, ,$$

ciò che ci permette di scrivere la formola (I_3) sotto la forma:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} = \nabla \mathrm{M} \qquad \text{dove} \quad \mathrm{M} = \mathrm{L} + \frac{\mu}{\rho_0} \mathrm{H}^2 - v^2 .$$

Nel nostro caso dalle (II_{1-3}) segue subito:

$$p_t = v\,(p_1 + q_2) \quad ; \quad r'_t = v\,[\cos\theta\,(r'_2 - r_2) - r_1 \sin^2\theta]\,,$$

$$(\ln H)_t = v\left\{r_1 \cos\theta + r'_2 + \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\,[r'_1 - r_1 + (r_2 - r'_2)\cos\theta]\right\},$$

alle quali si aggiungono le condizioni di integrabilità:

$$\text{rot}\,\frac{\partial \mathbf{I}_j}{\partial \omega^j} = 0 \quad (j = 1, 2) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\, \text{rot}\, \boldsymbol{v}}{\partial t} = 0\,. \tag{29}$$

Dal punto di vista geometrico i due campi fondamentali $\boldsymbol{v}$ e $\mathbf{H}$ determinano due complessi lineari associati, l'angolo dei quali, verificherà certe condizioni; in particolare se $\theta = \pi/2$ avremo:

$$p_3 = q_3 = r_1 = r_2 = 0 \quad ; \quad p_1 = -q_2 = -r_3\,.$$

Quindi i complessi lineari per $\boldsymbol{v}$ e $\mathbf{H}$ saranno coniugati, cioè abbiamo un complesso lineare e il complesso delle binormali del suo riferimento canonico; le linee vettoriali di questi campi saranno eliche circolari. Indagando le condizioni di integrabilità (29) esse saranno verificate soltanto per i moti stazionari; una delle soluzioni, per esempio, si ha quando il complesso determinato da $\boldsymbol{v}$ costituisce un complesso lineare speciale.