
ATTI ACCADEMIA NAZIONALE DEI LINCEI
CLASSE SCIENZE FISICHE MATEMATICHE NATURALI
RENDICONTI

GIAMBATTISTA SCARPI

Onde provocate da moti periodici nel sottosuolo

*Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche,
Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. 48 (1970), n.3, p. 324–333.*

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_48_3_324_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Idrodinamica. — *Onde provocate da moti periodici nel sottosuolo.*
 Nota di GIAMBATTISTA SCARPI (*), presentata (**) dal Socio G. SUPINO.

SUMMARY. — First order waves produced in a channel by a vibrating point underground are studied, as an approach to determination of waves related to seismic phenomena. The asymptotic expression of free surface has been carried out via Fourier transforms.

1. — Consideriamo un canale orizzontale indefinito di profondità H ; la presenza nel sottosuolo di una sorgente di vibrazioni provoca delle deformazioni nella configurazione del fondo del canale, con l'insorgere in esso di moti ondosi, e presenta a nostro avviso interesse la determinazione della

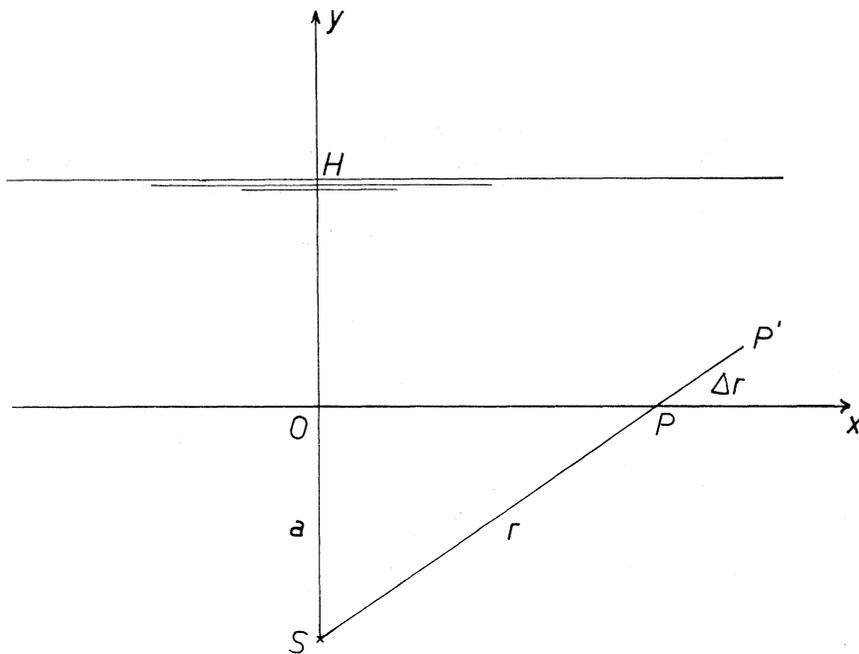


Fig. 1.

forma del pelo libero (anche nell'ipotesi semplificativa che il fenomeno sia periodico nel tempo), come primo passo verso lo studio di onde provocate da fenomeni sismici.

Useremo per questo esame lo schema matematico di moto piano irrotazionale di liquido perfetto, limitandoci alla prima approssimazione.

(*) Istituto di Idraulica dell'Università di Bologna.

(**) Nella seduta del 14 marzo 1970.

Facciamo coincidere l'asse x col fondo del canale, e supponiamo che l'asse verticale y passi per la sorgente S delle oscillazioni, che collochiamo ad una profondità a sotto il fondo (fig. 1). Supponiamo che S dia luogo ad oscillazioni a simmetria radiale, tali che lo spostamento di un punto P lungo la direzione SP , dovuto all'onda di compressione ⁽¹⁾, sia $PP' = \Delta r = \frac{A}{r}$, essendo $SP = r = \sqrt{a^2 + x^2}$. La componente verticale dello spostamento Δr sarà

$$\Delta y = \Delta r \cos \alpha = \frac{A}{r} \cdot \frac{a}{r} = \frac{Aa}{r^2} = \frac{Aa}{a^2 + x^2}.$$

Se c_0 è la velocità di propagazione delle oscillazioni nel suolo, lungo la direzione x la perturbazione avanzerà con la velocità

$$c = c_0 \sin \alpha = \frac{c_0 x}{\sqrt{a^2 + x^2}}.$$

Allora lo spostamento di un punto del fondo in direzione verticale sarà rappresentato da una relazione del tipo (si trascurano le riflessioni):

$$\Delta y = \frac{Aa}{a^2 + x^2} F\left(\frac{x}{c} - t\right) = \frac{Aa}{a^2 + x^2} F\left(\frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_0} - t\right).$$

Poniamo ora che la sorgente S oscilli periodicamente nel tempo con pulsazione k , e che risulti in particolare

$$F\left(\frac{x}{c} - t\right) = \sin\left(\frac{kx}{c} - kt\right) = \sin[b\sqrt{a^2 + x^2} - kt]$$

avendo posto $b = k/c_0$. Noto Δy , è nota la velocità con cui si muovono verticalmente i punti del fondo, e sarà

$$(1) \quad v = \frac{d}{dt}(\Delta y) = \frac{B}{a^2 + x^2} \cos[b\sqrt{a^2 + x^2} - kt]$$

essendo $B = -aAk$.

Con lo schema matematico adottato [I] esiste il potenziale di velocità $\varphi(x, y, t)$, che verifica la

$$(2) \quad \Delta_2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0.$$

e tale che sia

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}.$$

La φ deve inoltre verificare le seguenti condizioni ai limiti: la condizione di Poisson sul pelo libero ($y = H$):

$$(3) \quad g \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$$

(1) Sono le onde di tipo « P » dei sismologi.

la

$$(4) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{x=0} = 0$$

per la simmetria del problema, e infine, per la (1)

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{B}{a^2 + x^2} \cos [b \sqrt{a^2 + x^2} - kt]$$

cioè

$$(5) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_{y=0} = \frac{B}{a^2 + x^2} \cos kt \cos [b \sqrt{a^2 + x^2}] + \\ + \frac{B}{a^2 + x^2} \sin kt \sin [b \sqrt{a^2 + x^2}].$$

2. - Consideriamo la funzione

$$(6) \quad \varphi_\lambda(x, y, t) = C \sin \lambda x \sin kt [\text{Sh } \lambda y + \alpha \text{Ch } \lambda y] + \\ + C \cos \lambda x \cos kt [\text{Sh } \lambda y + \alpha \text{Ch } \lambda y] = \\ = C \sin \lambda x \sin kt \cdot G(\lambda) + C \cos \lambda x \cos kt G(\lambda)$$

avendo posto $G(\lambda) = \text{Sh } \lambda y + \alpha \text{Ch } \lambda y$; essa verifica la (2); affinché sia soddisfatta la (3) deve essere

$$(7) \quad \alpha = \frac{k^2 \text{Th } \lambda H - g\lambda}{g\lambda \text{Th } \lambda H - k^2};$$

scegliendo $C = B/\lambda$, abbiamo

$$\left(\frac{\partial \varphi_\lambda}{\partial y}\right)_{y=0} = B \sin \lambda x \sin kt + B \cos \lambda x \cos kt.$$

Quindi la funzione φ_λ non soddisfa la (5); possiamo però pensare di sovrapporre diverse funzioni come la (6), fino a verificare la (5), cioè possiamo applicare il teorema dell'integrale di Fourier, scegliendo come nucleo la funzione $\cos \lambda x$ o $\sin \lambda x$; in generale risulta [2]:

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[\frac{\cos \lambda x}{\sin \lambda x} \int_0^\infty \psi(x) \frac{\cos \lambda x}{\sin \lambda x} dx \right] d\lambda = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mathfrak{F}_c}{\mathfrak{F}_s} [\psi] \frac{\cos \lambda x}{\sin \lambda x} d\lambda$$

essendo

$$\frac{\mathfrak{F}_c}{\mathfrak{F}_s} [\psi] = \int_0^\infty \psi(x) \frac{\cos \lambda x}{\sin \lambda x} dx.$$

Nel nostro caso avremo, detto φ_1 il potenziale da determinare,

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty C [\text{Ch } \lambda y + \alpha \text{Sh } \lambda y] \sin kt \sin \lambda x \frac{\mathfrak{F}_c}{\mathfrak{F}_s} [(a^2 + x^2)^{-1} \sin b \sqrt{a^2 + x^2}] d\lambda + \\ + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty C [\text{Ch } \lambda y + \alpha \text{Sh } \lambda y] \cos kt \cos \lambda x \frac{\mathfrak{F}_c}{\mathfrak{F}_s} [(a^2 + x^2)^{-1} \cos b \sqrt{a^2 + x^2}] d\lambda,$$

cioè

$$\begin{aligned} \varphi_1 = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{B}{\lambda} G(\lambda) \sin kt \mathfrak{F}_s [(a^2 + x^2)^{-1} \sin b \sqrt{a^2 + x^2}] \sin \lambda x d\lambda + \\ & + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{B}{\lambda} G(\lambda) \cos kt \mathfrak{F}_c [(a^2 + x^2)^{-1} \cos b \sqrt{a^2 + x^2}] \cos \lambda x d\lambda. \end{aligned}$$

La funzione φ_1 così determinata verifica anche la condizione (5), ma non la (4): infatti si ha

$$(8) \quad \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \right)_{x=0} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} BG(\lambda) \sin kt \mathfrak{F}_s [(a^2 + x^2)^{-1} \sin b \sqrt{a^2 + x^2}] d\lambda = A(y) \sin kt.$$

Aggiungiamo allora alla φ_1 un'altra componente φ_0 data da

$$(9) \quad \varphi_0 = + \frac{A_0}{\lambda_0} \frac{\text{Ch } \lambda_0 y}{\text{Sh } \lambda_0 H} \cos(kt - \lambda_0 x) - \sum_p \frac{A_p}{\lambda_p} e^{-\lambda_p x} \frac{\cos \lambda_p y}{\sin \lambda_p H} \sin kt;$$

φ_0 soddisfa la (2), ed inoltre è $\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)_{y=0} = 0$; scegliendo λ_0 ed i λ_p in modo che sia

$$(10) \quad k^2 = \lambda_0 g \text{Th } \lambda_0 H, \quad k^2 = -\lambda_p g \text{tg } \lambda_p H,$$

la (9) verifica la (3); si ha inoltre

$$\left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)_{x=0} = \left[A_0 \frac{\text{Ch } \lambda_0 y}{\text{Sh } \lambda_0 H} + \sum_p A_p \frac{\cos \lambda_p y}{\sin \lambda_p H} \right] \sin kt;$$

se risulta

$$(11) \quad A(y) = A_0 \frac{\text{Ch } \lambda_0 y}{\text{Sh } \lambda_0 H} + \sum_p A_p \frac{\cos \lambda_p y}{\sin \lambda_p H},$$

allora $\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$ soddisfa a tutte le condizioni imposte.

Ma le funzioni $\text{Ch } \lambda_0 y$, $\cos \lambda_p y$ costituiscono un sistema completo di autofunzioni ortogonali in $0 \leq y \leq H$ ([3], [4]); quindi è possibile verificare la (11) ponendo

$$(12) \quad A_0 = \frac{\text{Sh } \lambda_0 H \int_0^H A(y) \text{Ch } \lambda_0 y dy}{\int_0^H \text{Ch}^2 \lambda_0 y dy},$$

$$(13) \quad A_p = \frac{\sin \lambda_p H \int_0^H A(y) \cos \lambda_p y dy}{\int_0^H \cos^2 \lambda_p y dy}.$$

Il pelo libero è dato da

$$\begin{aligned} \eta(x, t) &= \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{y=H} = \\ &= \frac{2kB}{\pi g} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} G_0(\lambda) \cos kt \mathfrak{F}_s [(a^2 + x^2)^{-1} \sin b \sqrt{a^2 + x^2}] \sin \lambda x \, d\lambda - \\ &- \frac{2kB}{\pi g} \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} G_0(\lambda) \sin kt \mathfrak{F}_c [(a^2 + x^2)^{-1} \cos b \sqrt{a^2 + x^2}] \cos \lambda x \, d\lambda + \\ &+ \frac{A_0 k}{\lambda_0 g} \text{Cth } \lambda_0 H \sin (kt - \lambda_0 x) + \sum_p \frac{A_p k}{\lambda_p g} e^{-\lambda_p x} \text{ctg } \lambda_p H \cos kt, \end{aligned}$$

essendo

$$(14) \quad G_0(\lambda) = \text{Sh } \lambda H + \frac{k^2 \text{Th } \lambda H - g\lambda}{g\lambda \text{Th } \lambda H - k^2} \text{Ch } \lambda H.$$

Si ha [5]:

$$\begin{aligned} f_1(\lambda) &= \mathfrak{F}_s [(a^2 + x^2)^{-1} \sin b \sqrt{a^2 + x^2}] \simeq \frac{\pi \text{Sh } ab}{2a} e^{-a\lambda} & \lambda \geq b \\ f_2(\lambda) &= \mathfrak{F}_c [(a^2 + x^2)^{-1} \cos b \sqrt{a^2 + x^2}] = \frac{\pi b}{2a} e^{-a\lambda} & \lambda \geq b; \end{aligned}$$

quando $\lambda < b$ non è nota la esatta espressione analitica di f_1 ed f_2 . Si dimostra però facilmente che $|f_1| < \frac{\pi}{2a}$, $|f_2| < \frac{\pi}{2a}$.

Avremo allora

$$\begin{aligned} (15) \quad \eta(x, t) &= \cos kt \frac{kB \text{Sh } ab}{ga} \int_b^\infty \frac{1}{\lambda} G_0(\lambda) e^{-a\lambda} \sin \lambda x \, d\lambda - \\ &- \sin kt \frac{kB}{ga} \int_b^\infty \frac{1}{\lambda} G_0(\lambda) e^{-a\lambda} \cos \lambda x \, d\lambda + \\ &+ \frac{2kB}{\pi g} \int_0^b \frac{1}{\lambda} G_0(\lambda) f_1(\lambda) \sin \lambda x \cos kt \, d\lambda - \\ &- \frac{2kB}{\pi g} \int_0^b \frac{1}{\lambda} G_0(\lambda) f_2(\lambda) \cos \lambda x \sin kt \, d\lambda + \\ &+ \frac{A_0 k}{\lambda_0 g} \text{Cth } \lambda_0 H \sin (kt - \lambda_0 x) + \sum_p \frac{A_p k}{\lambda_p g} \text{ctg } \lambda_p H e^{-\lambda_p x} \sin kt = \\ &= \frac{kB \text{Sh } ab}{ga} \cos kt I_1 - \frac{kB}{ga} \sin kt I_2 + \\ &+ \frac{2kB}{\pi g} \cos kt I_3 - \frac{2kB}{\pi g} \sin kt I_4 + \eta_0. \end{aligned}$$

3. - Cerchiamo ora di valutare gli integrali indicati in (15) con I_1, I_2, I_3, I_4 . Si deve osservare che quando

$$(10') \quad g\lambda \operatorname{Th} \lambda H - k^2 = 0$$

la $G_0(\lambda)$ e la $G(\lambda)$ vanno all'infinito, del primo ordine.

Il valore λ_0 di λ per cui vale la (10') è lo stesso valore λ_0 che soddisfa la (10); da un punto di vista fisico questo corrisponde alla possibilità che nel canale si stabilisca un'onda di ampiezza costante che si può mantenere senza bisogno di movimento del fondo, e le cui caratteristiche dipendono dalla pulsazione del fenomeno e dall'altezza d'acqua presente.

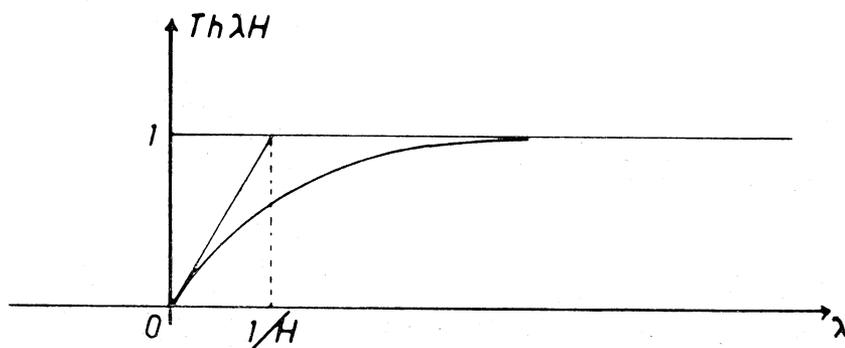


Fig. 2.

Gli integrali in cui compare $G(\lambda)$ avranno ancora senso, purché si intenda di considerarne il « valore principale di Cauchy ».

Valutiamo ora l'ordine di grandezza delle quantità fisiche in gioco: si può assumere [6] [7] $k \simeq 10 \text{ s}^{-1}$, o più, e quindi $k^2 \simeq 10^2 \text{ s}^{-2}$; allora, essendo $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$, se H è dell'ordine del metro (o più), la soluzione λ_0 della (10') è, con buona approssimazione, $\lambda_0 \simeq k^2/g \simeq 10 \text{ m}^{-1}$; la velocità c_0 di propagazione della perturbazione nel suolo si può pensare compresa fra i 1000 ed i 13000 m/s, quindi $b < 10^{-2} \text{ m}^{-1} < \lambda_0$.

Consideriamo ora I_1 : per darne un valore approssimato, schematizziamo la funzione $\operatorname{Th} \lambda H$ come in fig. 2, cioè poniamo

$$\operatorname{Th} \lambda H = \begin{cases} \lambda H & \lambda \leq 1/H \\ 1 & \lambda \geq 1/H. \end{cases}$$

Avremo allora, supposto $\lambda_0 > 1/H$ (che con i dati numerici visti qui sopra è vero già per profondità di circa 10 cm), e $b < 1/H$ (cioè H non superiore a qualche centinaio di metri),

$$I_1 \simeq \int_b^{1/H} \frac{g e^{-a\lambda}}{g\lambda^2 H - k^2} (\lambda^2 H^2 - 1) \operatorname{Ch} \lambda H \sin \lambda x \, d\lambda + \int_{1/H}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(a+H)}}{\lambda} \sin \lambda x \, d\lambda;$$

cioè, con buona approssimazione

$$\begin{aligned} I_1 &\simeq g \frac{b^2 H^2 - 1}{g b^2 H - k^2} \int_b^{1/H} e^{-a\lambda} \sin \lambda x \, d\lambda + \int_{1/H}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(a+H)}}{\lambda} \sin \lambda x \, d\lambda = \\ &= g \frac{b^2 H^2 - 1}{g b^2 H - k^2} \left[\frac{e^{-a/H}}{a^2 + x^2} \left(-a \sin \frac{x}{H} - x \cos \frac{x}{H} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-ab}}{a^2 + x^2} \left(-a \sin bx + x \cos bx \right) \right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[E_1 \left(\frac{a+H+ix}{H} \right) + E_1 \left(\frac{a+H-ix}{H} \right) \right], \end{aligned}$$

essendo [8]

$$E_1(\zeta) = \int_{\zeta}^{\infty} e^{-t} t^{-1} dt.$$

In modo analogo si ottiene per I_2 :

$$\begin{aligned} I_2 &\simeq \int_b^{1/H} \frac{g e^{-a\lambda}}{g \lambda^2 H - k^2} (\lambda^2 H^2 - 1) \operatorname{Ch} \lambda H \cos \lambda x \, d\lambda + \int_{1/H}^{\infty} \frac{e^{-\lambda(a+H)}}{\lambda} \cos \lambda x \, d\lambda \simeq \\ &\simeq g \frac{b^2 H^2 - 1}{b^2 g H - k^2} \left[\frac{e^{-a/H}}{a^2 + x^2} \left(-a \cos \frac{x}{H} + x \sin \frac{x}{H} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-ab}}{a^2 + x^2} \left(-a \cos bx + x \sin bx \right) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[E_1 \left(\frac{a+H+ix}{H} \right) + E_1 \left(\frac{a+H-ix}{H} \right) \right]. \end{aligned}$$

Restano ora da calcolare I_3 ed I_4 : possiamo maggiorare sia $|f_1|$ sia $|f_2|$ in $0 \leq \lambda \leq b$ con la quantità $\pi/2 a$; allora

$$I_3 \simeq \frac{\pi}{2a} \int_0^b \frac{1}{\lambda} G_0(\lambda) \sin \lambda x \, d\lambda$$

$$I_4 \simeq \frac{\pi}{2a} \int_0^b \frac{1}{\lambda} G_0(\lambda) \cos \lambda x \, d\lambda;$$

ma risulta

$$\begin{aligned} I_3 &\simeq \frac{\pi g}{2 a k^2} \int_0^b \operatorname{Ch} \lambda H \sin \lambda x \, d\lambda = \\ &= \frac{\pi g}{2 a k^2} [H \operatorname{Sh} bH \sin bx - x \operatorname{Ch} bH \cos bx + x] \frac{1}{x^2 + H^2} \simeq \\ &\simeq \frac{\pi g}{2 a k^2} \frac{1}{x^2 + H^2} [bH^2 \sin bx - x \cos bx + x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_4 &\simeq \frac{\pi g}{2 ak^2} \int_0^b \text{Ch } \lambda H \cos \lambda x \, d\lambda = \\
 &= \frac{\pi g}{2 ak^2} \frac{1}{x^2 + H^2} [\text{H Sh } bH \cos bx + x \text{Ch } bH \sin bx] \simeq \\
 &\simeq \frac{\pi g}{2 ak^2} \frac{1}{x^2 + H^2} [bH^2 \cos bx + x \sin bx].
 \end{aligned}$$

4. - Possiamo fornire per I_1 ed I_2 espressioni più agevoli: in essi figura la quantità $E_1(\zeta) + E_1(\zeta^*)$, essendo ζ^* il complesso coniugato di ζ , e $\zeta = (a + H + ix)/H$; ricordando [9] [10] che risulta $E_1(\zeta^*) = E_1^*(\zeta)$, basterà valutare la parte reale del numero complesso $E_1(\zeta)$.

Se $|\zeta|$ è sufficientemente grande, vale per $E_1(\zeta)$ lo sviluppo asintotico [11]:

$$E_1(\zeta) = \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} \left[1 - \frac{1!}{\zeta} + \frac{2!}{\zeta^2} - \dots \right];$$

assumiamo nel seguito

$$E_1(\zeta) \simeq \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} - \frac{e^{-\zeta}}{\zeta^2}.$$

Chiamando, in generale $\zeta = p + iq$, abbiamo

$$E_1(\zeta) \simeq \frac{e^{-\zeta}}{\zeta^2} (\zeta - 1) = \frac{e^{-p} \cdot e^{-iq}}{(p + iq)^2} (p - 1 + iq),$$

e si ricava facilmente

$$\text{Re} [E_1(\zeta)] \simeq \frac{e^{-p}}{(p^2 + q^2)^2} [(p^3 - p^2 + pq^2 + q^2) \cos q + (2pq - p^2q - q^3) \sin q].$$

Sostituendo a p e a q gli opportuni valori, si possono esprimere I_1 ed I_2 in termini reali.

Restano ora da calcolare i coefficienti A_0 ed A_p della (9); tenendo conto della (8) e della (12) si ricava dopo laboriosi calcoli:

$$\begin{aligned}
 A_0 &\cong \frac{2\lambda_0 \text{Sh } \lambda_0 H}{\lambda_0 H + \text{Sh } \lambda_0 H \text{Ch } \lambda_0 H} \left[\frac{\text{B Sh } ab}{a} \left(\frac{e^{-a/H}}{4} \{ e^{aR} [Ei(\text{UR}) + \right. \right. \\
 &+ Ei(-\text{RT}) - 2Ei(aR)] + e^{-aS} [Ei(-\text{US}) + Ei(\text{ST}) - 2Ei(aS)] \} - \\
 &- \frac{e^{-ab}}{4} \{ e^{aP} [Ei(\text{PU}) + Ei(-\text{PT}) - 2Ei(-aP)] + \\
 &+ e^{-aQ} [Ei(-\text{UQ}) + Ei(\text{QT}) - 2Ei(aQ)] \} - \\
 &- \varepsilon \left[\frac{e^{-a/H}}{4H} \{ e^{aR} [Ei(\text{UR}) - Ei(\text{RT})] + e^{-aS} [Ei(-\text{US}) - Ei(\text{ST})] \} + \right. \\
 &+ \left. \frac{e^{-a/H}}{4} \left\{ -\frac{e^{RH} + e^{-SH}}{U} - \frac{e^{-RH} + e^{SH}}{T} + \text{Re}^{aR} [Ei(\text{RU}) - Ei(-\text{RT})] + \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + Se^{-aS} [Ei (ST) - Ei (-US)] \left\{ + \frac{e^{-ab}}{4} \left\{ - \frac{e^{PH} + e^{-QH}}{U} - \frac{e^{-PH} + e^{QH}}{T} + \right. \right. \\
& + Pe^{aP} [Ei (PU) - Ei (-PT) + Qe^{-aQ} [Ei (QT) - Ei (-QU)] \left. \right\} - \\
& - \frac{be^{-ab}}{4} \left\{ e^{aP} [Ei (PU) - Ei (-PT)] + e^{-aQ} [Ei (-UQ) - Ei (QT)] \right\} \left. \right\} + \\
& + \frac{B}{2a} \left(\ln \frac{Q}{P} + chi (PH) - chi (QH) - \right. \\
& \left. - \varepsilon \left\{ \frac{1}{H} (Ch PH - Ch QH) - \lambda_0 [shi (PH) - shi (QH)] \right\} \right),
\end{aligned}$$

essendo

$$\begin{aligned}
P &= \lambda_0 + b, & Q &= \lambda_0 - b, & R &= \lambda_0 + 1/H, & S &= \lambda_0 - 1/H, \\
T &= H + a, & U &= H - a, & \varepsilon &= H - g/k^2,
\end{aligned}$$

e dove

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt \quad (\text{se } x > 0, \text{ è il valore principale di Cauchy});$$

$$chi(x) = \gamma + \ln x + \int_0^x \frac{Cht - 1}{t} dt, \quad (\gamma = 0,577215\dots, \text{ costante di Eulero}),$$

e

$$shi(x) = \int_0^x \frac{Sh t}{t} dt.$$

Per il calcolo delle A_p si giunge a formule analoghe, che però non riportiamo; infatti le onde dovute ai termini che contengono A_p si smorzano con legge esponenziale in x , e per x sufficientemente grande si possono trascurare; in ogni caso è facile verificare che la sopraelevazione $\bar{\eta}$ dovuta a tali termini è

$$\bar{\eta} = \frac{1}{g} \sum_p \frac{A_p k}{\lambda_p} e^{-\lambda_p x} \operatorname{ctg} \lambda_p H \cos kt = \sum_p \frac{A_p}{k} e^{-\lambda_p x} \cos kt$$

e, per x abbastanza grande si ha, notando che $A_p = O(1/p)$ e che $\lambda_p \simeq \frac{\pi}{2} + p\pi$,

$$|\bar{\eta}| < \frac{A}{\operatorname{Sh} \frac{\pi}{2} x} \simeq A e^{-(\pi/2)x} = O(e^{-x})$$

essendo A una opportuna costante.

5. - CONCLUSIONI.

Si può dunque dare per il pelo libero, a sufficiente distanza dall'origine, la seguente espressione:

$$\eta(x, t) \cong \left[\frac{kB \text{ Sh } ab}{ag} I_1 + \frac{2kB}{\pi g} I_3 \right] \cos kt - \left[\frac{kB}{ga} I_2 + \frac{2kB}{\pi g} I_4 \right] + \\ + Ae^{-(\pi/2)x} + \frac{A_0}{k} \sin(kt - \lambda_0 x).$$

L'ultimo termine rappresenta un'onda di ampiezza costante, di lunghezza $2\pi/\lambda_0$, che si propaga con velocità $k/\lambda_0 \simeq g/k$.

I primi due termini invece rappresentano onde di lunghezza $2\pi H$ e $2\pi/b$ (queste ultime assai lunghe, quindi), che però si smorzano almeno come $1/x$ allontanandosi dall'origine; il terzo termine infine rappresenta oscillazioni aperiodiche (rispetto ad x), che decrescono d'ampiezza ancor più rapidamente delle precedenti.

L'espressione asintotica del pelo libero può allora essere scritta nel modo seguente:

$$\eta \simeq \frac{A_0}{k} \sin(kt - \lambda_0 x) + \frac{1}{x} \cos kt \left[\alpha_1 \cos\left(\frac{x}{H} + \psi_1\right) + \alpha_2 \cos(bx + \psi_2) \right] + \\ + \frac{1}{x} \sin kt \left[\beta_1 \cos\left(\frac{x}{H} + \varphi_1\right) + \beta_2 \cos(bx + \varphi_2) + \beta_3 \right] + O(x^{-2}).$$

BIBLIOGRAFIA.

- [1] H. LAMB, *Hydrodynamics*, 6^a ed.; Cambridge 1932.
- [2] I. N. SNEDDON, *Fourier Transforms*. Mc Graw Hill, New York 1951.
- [3] G. SCARPI, *Onde provocate da moti periodici del fondo di un canale*, « Rend. Acc. Naz. Lincei », Serie VIII, Vol. XLVI, aprile 1969.
- [4] E. C. TITCHMARSH, *Eigenfunction expansion associated with second order differential equations*. Oxford 1946
- [5] F. OBERHETTINGER, *Tabellen zur Fourier-Transformation*. Springer, Berlin 1957.
- [6] E. PERRI, *Ingegneria antisismica*. UTET, Torino 1966.
- [7] C. BRATU, *Sul comportamento in regime sismico dei liquidi contenuti in serbatoi rettangolari*. IX Convegno di Idraulica, Trieste 1965.
- [8] I. S. GRADSHTEYN e L. M. RYZHIK, *Tables of integrals, series and products*. Academic Press, New York 1965.
- [9] W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER e R. P. SONI, *Formulas and theorems for the special functions of mathematical physics*. Springer, Berlin 1966.
- [10] ERDELIY et altri, *Higher transcendental functions*. McGraw Hill, New York 1953.
- [11] N. ABRAMOWITZ e I. STEGUN, *Handbook of mathematical functions*. Dover publ., New York 1965.