Atti Accademia Nazionale dei Lincei

Classe Scienze Fisiche Matematiche Naturali

Rendiconti

Marco Biroli

Solutions presque périodiques d'une équation et d'une inéquation parabolique avec terme de retard non linéaire. Nota II

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Serie 8, Vol. **49** (1970), n.1-2, p. 23–26.

Accademia Nazionale dei Lincei

<http://www.bdim.eu/item?id=RLINA_1970_8_49_1-2_23_0>

Atti della Accademia Nazionale dei Lincei. Classe di Scienze Fisiche, Matematiche e Naturali. Rendiconti, Accademia Nazionale dei Lincei, 1970.

Analisi matematica. — *Solutions presque périodiques d'une équation et d'une inéquation parabolique avec terme de retard non linéaire.* Nota II di MARCO BIROLI [(*)], presentata [(**)] dal Corrisp. L. AMERIO.

RIASSUNTO. — Si dimostra il Teorema I enunciato nella Nota I.

Démontrons le Théorème I, énoncé dans (I).

Considérons $\psi(\eta)$ et écrivons

$$\bar{a} = \operatorname*{Sup}_{0 \leq \eta \leq \frac{R}{\alpha\gamma}} \psi(\eta)$$

et indiquons avec $\bar{c}_2$ la valeur de la constante c_2 du lemme I de (I), qui correspond à $\bar{a}$. Soit q un nombre réel tel que

$$\left(q \cdot \frac{R}{\alpha\gamma^2} M + 1\right) \leq q \cdot \alpha\gamma .$$

Puisque $M < \frac{\alpha^2 \gamma^3}{R}$, il y a toujours un tel nombre. Considérons l'ensemble $\mathbf{Z} \subset L^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}\,;\,H)$

$$\mathbf{Z} = \Big\{ z(t) \mid z(t) \in L^2_{\mathrm{Loc}}(R\,;\,H) \quad , \quad |z(t)| \leq \frac{R}{\alpha\gamma} ,$$

$$\int_0^1 \| z(t+\eta) \|^2 \, d\eta \leq c_1 \quad , \quad \int_0^1 (\| z'(t+\eta) \|^*)^2 \, d\eta \leq \bar{c}_2$$

$$| z(t+\sigma) - z(t) | \leq q \, (\operatorname{Sup} \| f(t+\sigma) - f(t) \|^*) \qquad \forall \sigma \in \mathbf{R} \Big\}$$

On peut facilement vérifier que $\mathbf{Z}$ est un ensemble compact non vide de $L^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}\,;\,H)$. Considérons $z(t) \in \mathbf{Z}$ et le problème

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{cases} u_z'(t) + A u_z(t) + \beta(|z(t-\tau)|) \, u_z(t) = f(t) \\ u_z(t) \in L^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}\,;\,V) . \end{cases}$$

Le problème (1.1) a une solution $u_z(t) \in L^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}\,;\,V) \subset L^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}\,;\,H)$. Considérons l'application

$$T : z(t) \rightarrow u_z(t)$$

Démontrons que T est continue sur $\mathbf{Z}$.

(*) Istituto matematico del Politecnico di Milano – Lavoro eseguito usufruendo di una borsa di studio del C.N.R. presso l'Università di Parigi.

(**) Nella seduta del 13 giugno 1970.

Soit $\{z_n(t)\}$ une suite dans $\mathbf{Z}$, qui converge à $z(t)$ dans $L^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}\,;\mathrm{H})$. Pour le lemme I de (I) on a

$$|u_{z_n}(t)| \leq \frac{\mathrm{R}}{\alpha\gamma} \tag{1.2}$$

$$\int_0^1 \| u_{z_n}(t+\eta) \|^2 \, \mathrm{d}\eta \leq c_1 \tag{1.3}$$

$$\int_0^1 (\| u'_{z_n}(t+\eta) \|^*)^2 \, \mathrm{d}\eta \leq \bar{c}_2 \,. \tag{1.4}$$

Pour (2.9) et (2.10) on peut extraire de $\{u_{z_n}(t)\}$ une sous-suite $\{u_{z_\mu}(t)\}$ telle que

$$\lim_{\mu\to\infty} u_{z_\mu}(t) = u(t) \quad \text{dans} \quad L^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}\,;\mathrm{H}) \tag{1.5}$$

$$\lim_{\mu\to\infty}{}^{*} u_{z_\mu}(t) = u(t) \quad \text{dans} \quad L^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}\,;\mathrm{V}) \tag{1.6}$$

$$\lim_{\mu\to\infty}{}^{*} u'_{z_\mu}(t) = u'(t) \quad \text{dans} \quad L^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}\,;\mathrm{V}^*) \tag{1.7}$$

$$\lim_{\mu\to\infty} z_\mu(t) = z(t) \quad \text{dans} \quad L^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}\,;\mathrm{H})\,. \tag{1.8}$$

De (1.6) on a

$$\lim_{\mu\to\infty}{}^{*} \mathrm{A}\, u_{z_\mu}(t) = \chi(t) \quad \text{dans} \quad L^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}\,;\mathrm{V}^*)\,.$$

De (1.5) et (1.8) on a

$$\lim_{\mu\to\infty} \beta(|z_\mu(t-\tau)|)\, u_{z_\mu}(t) = \beta(|z(t-\tau)|)\, u(t)$$

dans $L^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}\,;\mathrm{H})$.

Pour affirmer $u_z(t) = u(t)$, il suffit de démontrer que $\chi(t) = \mathrm{A}u(t)$. On a, $\forall t_1 \leq t_2$,

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \mathrm{A}u_{z_\mu}(t)\,,\, u_{z_\mu}(t)\rangle \, \mathrm{d}t \leq \frac{1}{2}\{|u_{z_\mu}(t_2)|^2 - |u_{z_\mu}(t_1)|^2\} -$$
$$- \int_{t_1}^{t_2} \beta(|z_\mu(t-\tau)|)\, |u_{z_\mu}(t)|^2 \, \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t)\,,\, u_{z_\mu}(t)\rangle \, \mathrm{d}t\,.$$

Si on passe à la limite, on a p.p. dans $\mathbf{R}$,

$$\max \lim_{\mu\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} \langle \mathrm{A}u_{z_\mu}(t)\,,\, u_{z_\mu}(t)\rangle \, \mathrm{d}t \leq$$
$$\leq \frac{1}{2}\{|u(t_2)|^2 - |u(t_1)|^2\} - \int_{t_1}^{t_2} \beta(|z(t-\tau)|)\, |u(t)|^2 \, \mathrm{d}t +$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t)\,,\, u(t)\rangle \, \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} \langle \chi(t)\,,\, u(t)\rangle \, \mathrm{d}t\,.$$

On a alors, [1],

$$\mathrm{A}u(t) = \chi(t).$$

Alors $u_z(t) = u(t)$ et de l'unicité de $u_z(t)$ on a

$$\lim_{n\to\infty} u_{z_n}(t) = u_z(t) \qquad \text{dans} \qquad \mathrm{L}^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}\,;\mathrm{H}).$$

La continuité de T est aussi démontrée.

Démontrons maintenant $\mathrm{T}\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}$.

Pour le lemme I de (I) on a (1.2) (1.3) et (1.4). Fixons maintenant $\sigma \in \mathbf{R}$ et posons

$$\mathrm{M}(\sigma) = \operatorname*{Sup}_{t\in\mathbf{R}} \|f(t+\sigma) - f(t)\|^* .$$

On a

$$\langle u_z'(t+\sigma) - u_z'(t), u_z(t+\sigma) - u_z(t)\rangle + \langle \mathrm{A}u_z(t+\sigma) - \mathrm{A}u_z(t), u_z(t+\sigma) - u_z(t)\rangle +$$
$$+ \langle \beta(|z(t+\sigma-\tau)|)\cdot u_z(t+\sigma) - \beta(|z(t-\tau)|)\, u_z(t), u_z(t+\sigma) - u_z(t)\rangle =$$
$$= \langle f(t+\sigma) - f(t), u_z(t+\sigma) - u_z(t)\rangle$$

dont

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_z(t+\sigma) - u_z(t)|^2 \le \mathrm{M}(\sigma)\|u_z(t+\sigma) - u_z(t)\| -$$
$$-\alpha\|u_z(t+\sigma) - u_z(t)\|^2 - (\beta(|z(t+\sigma-\tau)|) -$$
$$-\beta(|z(t-\tau)|))\langle u_z(t+\sigma), u_z(t+\sigma) - u_z(t)\rangle \le$$
$$\le \|u_z(t+\sigma) - u_z(t)\|\cdot\Big[\mathrm{M}(\sigma) - \alpha\gamma|u_z(t+\sigma) - u_z(t)| +$$
$$+\mathrm{M}\frac{\mathrm{R}}{\alpha^2\gamma}|z(t+\sigma-\tau) - z(t-\tau)|\Big] \le$$
$$\le \|u_z(t+\sigma) - u_z(t)\|\Big[\mathrm{M}(\sigma) - \alpha\gamma|u_z(t+\sigma) - u_z(t)| +$$
$$+\mathrm{M}\frac{\mathrm{R}}{\gamma^2\alpha}q\cdot\mathrm{M}(\sigma)\Big] \le$$
$$\le \alpha\gamma\|u_z(t+\sigma) - u_z(t)\|\,[q\cdot\mathrm{M}(\sigma) - |u_z(t+\sigma) - u_z(t)|].$$

Si on utilise alors la même procédé utilisé dans le lemme I de (I) pour prouver l'éstimation (1.1), on démontre

$$|u_z(t+\sigma) - u_z(t)| \le q\cdot\mathrm{M}(\sigma).$$

On a aussi démontré que $\mathrm{T}\mathbf{Z} \subset \mathbf{Z}$.

L'application T a, au moins, un point fixe, [1]. Nous pouvons, alors, affirmer qu'il y a, au moins, une solution de notre problème telle que

$$|u(t+\sigma) - u(t)| \le q\cdot\mathrm{M}(\sigma) \tag{1.9}$$

De (1.9) on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\eta}\,|u(t+\sigma+\eta)-u(t+\eta)|^2 \leq$$

$$\leq \|f(t+\sigma+\eta)-f(t+\eta)\|^* \cdot \|u(t+\eta+\sigma)-u(t+\eta)\| +$$

$$-\alpha\|u(t+\sigma+\eta)-u(t+\eta)\|^2 + \overline{M}\frac{R}{\alpha\gamma^2}|u(t+\sigma-\tau+\eta)-u(t-\tau+\eta)| \leq$$

$$\leq M(\sigma)\,\|u(t+\sigma+\eta)-u(t+\eta)\| - \alpha\,\|u(t+\sigma+\eta)-u(t+\eta)\|^2 + \alpha\gamma q\cdot M(\sigma).$$

En intégrant on trouve

$$\int_0^1 \|u(t+\sigma+\eta)-u(t+\eta)\|^2\,d\eta \leq \varphi(M(\sigma)). \tag{1.10}$$

où $\varphi(m)$ est une fonction continue telle que pour $m \to 0$ $\varphi(m) \to 0$.

De (1.9) et (1.10) on a que $u(t)$ est presque périodique dans H et S^2 – presque périodique dans V. La thèse est aussi démontré.

Bibliographie

[1] Brézis H., *Équations et inéquations non linéaires dans les espaces en dualité*, « Amn. Inst. Fourier », *18*, 115–175 (1968).